**Praktikum Klassische Physik I**

# *Versuchsvorbereitung:*
# P1-12,22: Resonanz

Christian Buntin
*Gruppe Mo-11*

Karlsruhe, 14. Dezember 2009

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Drehpendel mit freien Schwingungen

Es soll der zeitliche Verlauf des Phasenwinkels $\varphi$, der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ sowie der kinetische Energie $W_{\text{kin}}$ eines Drehpendels untersucht werden. Dabei ist

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}$$

sowie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\theta\omega^2$$

wobei $\theta$ das Trägheitsmoment des Drehpendels ist. Für dieses gilt:

$$\theta = \int_M R^2 \,\mathrm{d}m = \int_V R^2 \rho(R) \,\mathrm{d}V$$

Somit folgt für einen Kreisring:

$$\theta = \frac{1}{2} m \left(r_a^2 + r_i^2\right)$$

Für das Drehpendel mit der hier auftretenden stokesschen Reibung als Dämpfung folgt:

$$\theta\ddot{\varphi} = -D^*\varphi - \gamma\dot{\varphi}$$

mit dem Dämpfungsfaktor $\gamma$. Als Lösung erhält man mit $\beta = \frac{\gamma}{2\theta}$ und $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\theta}$ für den Ansatz $\varphi = c \cdot e^{-\lambda t}$:

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Da hier nur eine schwache Dämpfung vorliegt, ist $\omega_0 > \beta$ und es folgt:

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}_{\omega}$$

Somit erhält man die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = e^{-\beta t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right)$$

und mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = A$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$:

$$\varphi(t) = A e^{-\beta t} \cos\left(\omega t + \psi\right)$$

Für die Periodendauer der Schwingung erhält man:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D^*}{\theta} - \frac{\gamma^2}{4\theta^2}}}$$

Zur Auswertung wird die Schwingung auch in Phasenraumdarstellung dargestellt, bei welcher die Winkelgeschwindigkeit über den Phasenwinkel aufgetragen wird.

Um die Dämpfungskonstante $\beta$ zu bestimmen, wird die theoretische Kurve an die experimentell ermittelte Schwingungskurve angepasst.

## 2 Drehpendel mit freien gedämpften Schwingungen

Anders als in der letzten Aufgabe, ist hier eine deutlich größere Dämpfung vorhanden (aber immernoch schwache Dämpfung), welche über eine Wirbelstrombremse erzeugt wird.

Die Winkel-Zeit-Diagramme werden bei verschiedenen Strömen $I_B$ durch die Wirbelstrombremse aufgenommen. Die Dämpfungskonstante wird einmal durch Anpassen einer errechneten Kurve an die gemessene Kurve ermittelt, zum anderen über das Dämpfungsverhältnis $k = e^{\beta T}$, für welches gilt:

$$k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i} \qquad \text{oder} \qquad k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$$

Da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{2\pi}{\omega_0}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\omega_0^2}}_{\ll 1} + \mathcal{O}\left(\beta^4\right)$$

ist die $\beta$-Abhängigkeit verschwindend gering.

Da die Dämpfung nicht nur von der Wirbelstrombremse erzeugt wird, wird die Dämpfung $\beta_{\text{korr}}\left(I_B\right) = \beta\left(I_B\right) - \beta\left(0\right)$ berechnet und über $I_B$ aufgetragen. Da die Reibungskraft proportional zum Magnetfeld der Wirbelstrombremse ist, welches wiederum proportional zum Strom $I_B$ ist, folgt: $\beta_{\text{korr}} \propto I_B^2$. Aus diesem Schaubild wird der Strom des aperiodischen Grenzfalles ermittelt, für den gilt: $\beta = \omega_0$. Experimentell ermittelt man diesen Wert, indem man die Dämpfung sucht, bei welcher das System am schnellsten wieder in Ruhe ist, was gerade beim aperiodischen Grenzfall der Fall ist.

Für die Güte $Q$ gilt:

$$Q = \frac{2\pi\cdot\text{Schwingungsenergie}}{\text{Energieverlust pro Periode}} = \frac{2\pi\cdot\frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2(t)}{\frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2(t) - \frac{1}{2}\theta\dot{\varphi}^2(t+T)} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\beta T}} = \frac{\omega}{2\beta} + \pi + \mathcal{O}\left(\beta T\right)$$

wenn $\beta T \ll 1$.

## 3 Messung der Winkelrichtgröße $D^*$

Für das Drehmoment $\vec{M}$ am Rad gilt:

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| = D^*\cdot\varphi$$

somit ist

$$D^* = \frac{Fr}{\varphi}$$

Also muss die Kraft $F$ im Abstand $r$ vom Mittelpunkt tangential zum Rad gemessen werden, die benötigt wird, um das Rad um den Winkel $\varphi$ auszulenken.

Da aus Aufgabe 1 gilt:

$$\omega_0^2 = \frac{D^*}{\theta}$$

Somit folgt für das Trägheitsmoment $\theta$:

$$\theta = \frac{D^*}{\omega_0^2} = \frac{D^*T^2}{4\pi^2}$$

# 4 Drehpendel mit erzwungenen Schwingungen

Für eine erzwungene Schwingung mit einem äußeren angreifenden periodischen Drehmoment $M_0$ der Kreisfrequenz $\Omega$ erhalten wir noch einen inhomogenen Teil zur Schwingungsdifferentialgleichung aus Aufgabe 1:

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = k\cos(\Omega t)$$

mit $k = \frac{M_0}{\theta}$.

Als Lösung erhält man die Linearkombination der Lösung der homogenen Gleichung und einer Lösung der partikulären Gleichung:

$$\varphi(t) = A_f e^{-\beta t}\cos(\omega t + \psi_f) + A_s\cos(\Omega t + \psi_s)$$

Man erkennt, dass sich bei schwacher Dämpfung nach Abklingen der Ausgangsschwingung eine Schwingung mit der Kreisfrequenz $\Omega$ einstellt:

$$\varphi(t) = A\cos(\Omega t + \psi)$$

wobei für die Amplitude $A$ und die Phasenverschiebung $\psi$ zur Anregungskraft gilt:

$$A = \frac{k}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\beta\Omega)^2}} \qquad \psi = \arctan\left(-\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Die maximale Amplitude wird bei $\Omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ erreicht. Bei dieser Resonanzfrequenz tritt dann eine Phasenverschiebung von $\psi = -\frac{\pi}{2}$ auf.

Um die Güte des Systems zu bestimmen, wird die Bandbreite $\Delta\omega$ bei Frequenzen der Amplitude $\frac{A_{\text{res}}}{\sqrt{2}}$ gemessen. Für die Güte $Q$ gilt dann:

$$\Delta\omega \approx 2\beta = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \Rightarrow Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

# 5 Serienschwingkreis mit erzwungenen Schwingungen

In dieser Aufgabe wird ein Serienschwingkreis, bestehend aus einer Reihenschaltung eines Kondensators der Kapazität $C$, einer Spule der Induktivität $L$ und einen Widerstand $R$ untersucht.

Nach Kirchhoff gilt für die Spannungen an de Bauteilen:

$$U(t) = U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,\mathrm{d}t$$

Daraus folgt die Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\dot{U}$$

Auch hier folgt die Lösung als Linearkombination der homogenen und partikulären Lösungen:

$$I_{\text{hom}}(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega t + \psi) \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$I_{\text{part}}(t) = I_0 e^{i\omega t + \psi}$$

Auch hier zeigt sich, dass der erste Term nach dem Einschwingungsvorgang verschwindet und nur noch die Erregerschwingung eine Rolle spielt.

Für die Amplitude $I_0$ und die Phasenverschiebung $\psi$ folgt dann mit der Impedanz $Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$ des Schwingkreises:

$$\tan\psi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}$$

Somit wird im Resonanzfall $\left(\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$ die Phasenverschiebung $\psi = 0$ und die Amplitude $I_0 = \frac{U_0}{R}$ wird maximal.

Der Strom $I$ wird über die Kreisfrequenz $\omega$ bei verschiedenen Widerständen $R$ aufgetragen.

Mit dem Gütefaktor $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ folgt für die Spannungsamplituden im Resonanzfall:

$$|U_L(\omega_0)| = QU_0 = |U_C(\omega_0)|$$

Da Q größer als 1 werden kann, tritt eine Spannungsüberhöhung auf.

Aus den Messdaten lässt sich $Q$ wie bei mechanischen Schwingungen bestimmen, indem die Frequenzbreite $\Delta\omega$ zwischen den Stellen der Amplitude $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ ermittelt wird. Damit folgt für die Güte des Schwingkreises:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$