

Praktikum Klassische Physik I

Versuchsauswertung: P1-53,54,55: Vierpole und Leitungen

Christian Buntin, Jingfan Ye
Gruppe Mo-11

Karlsruhe, 16. November 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Hochpass und Tiefpass	2
1.1	Hochpass	2
1.2	Tiefpass	4
2	Differenzier- und Integrierglieder	7
2.1	Differenziation einer Dreiecksspannung	7
2.2	Integration einer Rechtecksspannung	7
2.3	Weitere RC-Kombination	8
3	Drosselkette	10
3.1	Charakteristischer Widerstand	10
3.2	Grenzfrequenz	10
3.3	Berechnung der Kapazitäten und Induktivitäten	10
3.4	Phasenverschiebung	12
3.5	Reflexion am Kettenende	13
4	Koaxialkabel	14
4.1	Charakteristischer Widerstand	14
4.2	Verzögerungszeit (direkt)	15
4.3	Verzögerungszeit (über Reflexion)	15
4.4	Dielektrizitätskonstante	16

1 Hochpass und Tiefpass

1.1 Hochpass

Mit dem Frequenzgenerator legten wir eine Wechselfspannung von $U_e = \frac{1}{2} \cdot 7,58 \text{ V}$ und einer Frequenz von $f = 1,7 \text{ kHz}$ an einen Hochpass an (Die Spannung zwischen oberer und unterer Amplitude betrug $7,58 \text{ V}$). Die Zeit-Spannungs-Kurve ließen wir uns auf dem Oszilloskop anzeigen. Der Kondensator des Hochpasses besaß eine Kapazität $C = 1 \text{ nF}$. Der genaue Aufbau eines Hochpasses kann man aus der Vorbereitung entnehmen.

Mit einem Tastkopf maßen wir die Ausgangsspannung U_a bei den Widerständen $1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$, $100 \text{ k}\Omega$, $1000 \text{ k}\Omega$. Der Tastkopf erhöht den Innenwiderstand der Messapparatur vom reinen Innenwiderstand des Oszilloskops von $1 \text{ M}\Omega$ auf $10 \text{ M}\Omega$. Somit wird auf dem Oszilloskop nur $\frac{1}{10}$ der tatsächlichen Spannung angezeigt, wir mussten diesen Messwert also mit 10 multiplizieren, um zur tatsächlichen Spannung zu gelangen. Mit dem zeitlichen Spannungsverlauf von U_a konnten wir ebenfalls die Zeitverschiebung bestimmen.

Wir maßen bei der Ausgangsspannung wieder die Differenz zwischen oberer und unterer Amplitude. Die Zeitverzögerung Δt bestimmten wir, indem wir den Abstand der Nulldurchgänge der U_a - und U_e -Kurven maßen. Glücklicherweise konnten wir mit unserem Oszilloskop mit einem Drehknopf zwei parallele Geraden auf dem Schirm bewegen, deren Abstand der Oszilloskop direkt in Spannung bzw. Zeit umrechnete. Wir mussten diese Gerade also nur auf die Punkte schieben, von denen wir die Wertedifferenz wissen wollten und mussten nur noch ablesen (Abbildung 3).

Aus der Zeitverschiebung lässt sich mit folgender Formel aus der Vorbereitung die Phasenverschiebung ϕ bestimmen:

$$\varphi = 2\pi f \cdot \Delta t \quad (1)$$

Theoretisch gelten die ebenfalls in der Vorbereitung hergeleiteten Formeln:

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{R\omega C}{\sqrt{1 + R^2\omega^2 C^2}} \quad (2)$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{R\omega C} \Leftrightarrow \varphi = \arctan \frac{1}{R\omega C} \quad (3)$$

Der letzte Wert der gemessenen Spannung ist unrealistisch, da die Maschenregel verletzt wird, denn allein die Ausgangsspannung ist höher als die Eingangsspannung. Der Fehler wird neben Ablesefehler hauptsächlich an den Innenwiderstandswerten von Tastkopf und Oszilloskop liegen. Denn um auf die Spannung zurückzuschließen, mussten wir die angezeigte Spannung mit 10 multiplizieren. Wäre der Innenwiderstand des Tastkopfes etwas kleiner, wäre das Verhältnis der Innenwiderstände und

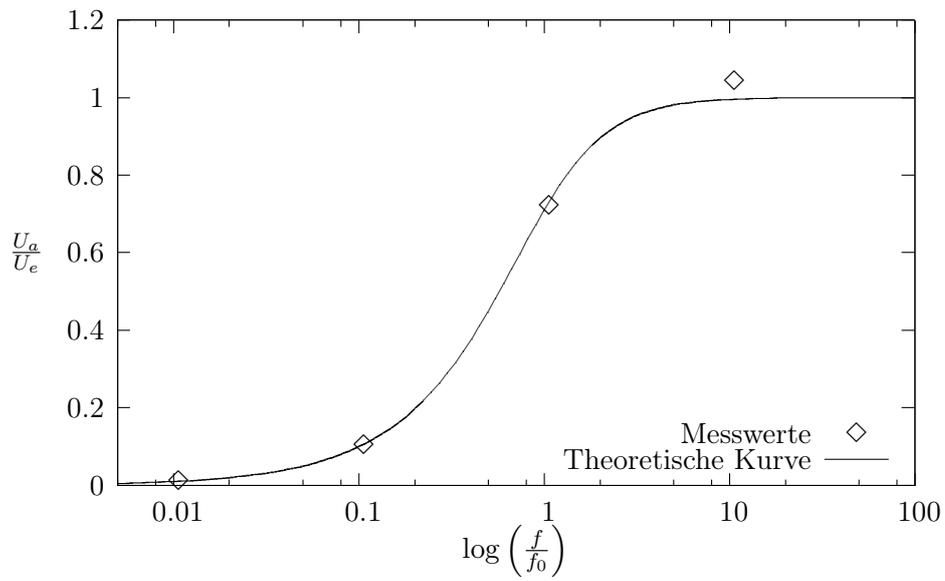


Abbildung 1: Frequenzabhängiges Spannungsverhalten am Hochpass

Theoretische Kurve:
$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{f}{f_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

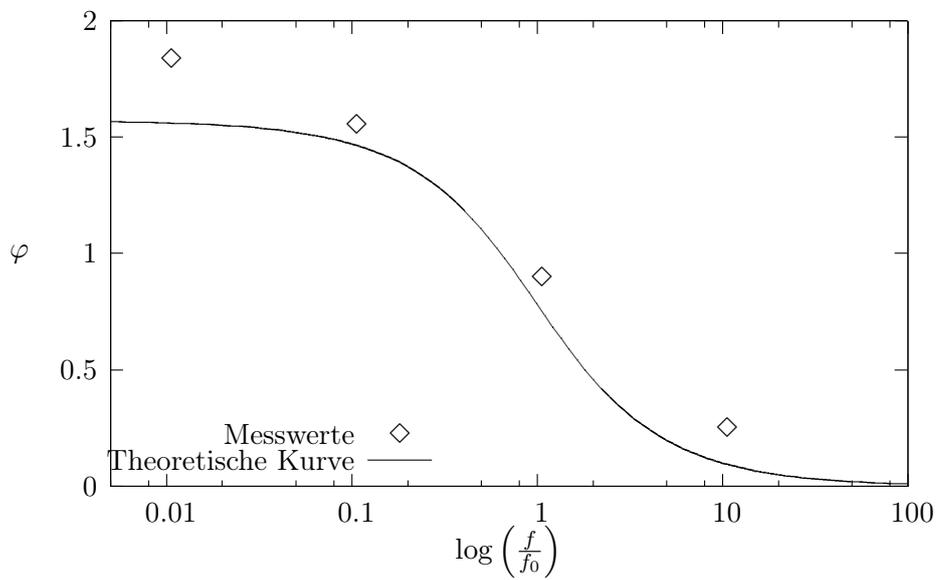


Abbildung 2: Frequenzabhängige Phasenverschiebung am Hochpass

Theoretische Kurve:
$$\varphi = \arctan\left(\frac{f_0}{f}\right)$$

R in kΩ	2 U _{a,exp} in V	$\frac{ U_{a,exp} }{ U_{e,exp} }$	$\frac{ U_{a,theo} }{ U_{e,theo} }$	Δt _{exp} in μs	φ _{exp}	φ _{theo}
1	0,078	0,010	0,010	171,5	1,832	1,560
10	0,774	0,102	0,106	145,4	1,553	1,464
100	5,52	0,72	0,73	84,1	0,898	0,752
1000	7,90	1,04	1,00	23,1	0,247	0,092

Tabelle 1: Mess- und Vergleichswerte beim Hochpass. C = 1 nF bleibt konstant.

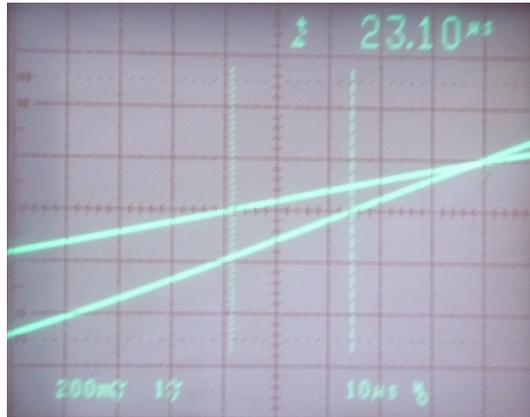


Abbildung 3: Messung auf dem Oszilloskop

damit der Faktor auch kleiner. Ingesamt dürfte der gemessene Wert also im Fehler-toleranzbereich liegen.

1.2 Tiefpass

Eingangsspannung und Frequenz entsprechen denen des Hochpasses, nur wurden die Positionen von Kondensator und Widerstand vertauscht. Der genaue Aufbau lässt sich auch hier in der Vorbereitung nachschlagen.

Theoretisch ergeben sich für das Verhältnis von Ausgangs- und Eingangsspannung

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}} \quad (4)$$

und für die Phasenverschiebung

$$\varphi = \arctan(-R\omega C) \quad (5)$$

Zur Berechnung der experimentellen Phasenverschiebung aus der Zeitverschiebung gilt immer noch Gleichung (1).

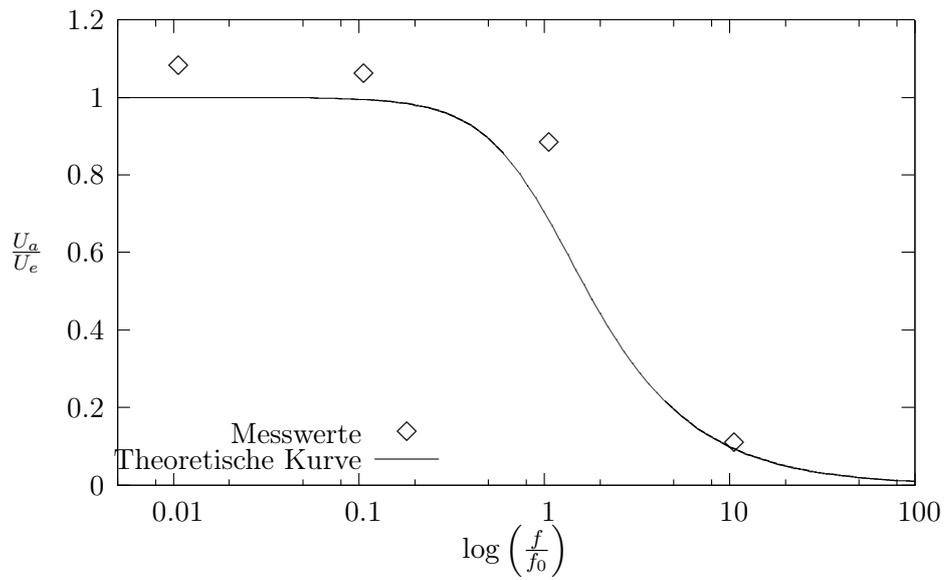


Abbildung 4: Frequenzabhängiges Spannungsverhalten am Tiefpass

Theoretische Kurve:
$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$$

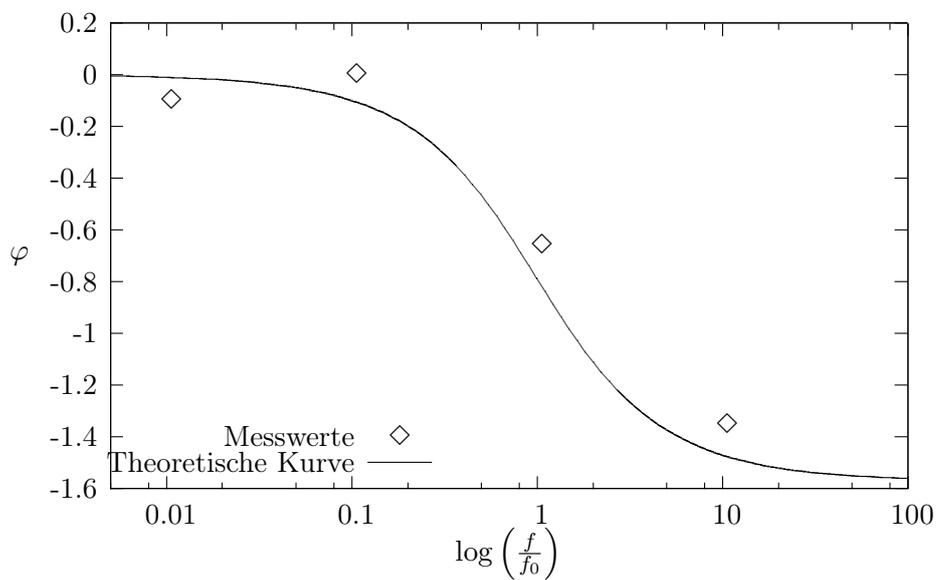


Abbildung 5: Frequenzabhängige Phasenverschiebung am Tiefpass

Theoretische Kurve:
$$\varphi = \arctan\left(-\frac{f}{f_0}\right)$$

R in k Ω	$2 U_{a,\text{exp}} $ in V	$\frac{ U_{a,\text{exp}} }{ U_{e,\text{exp}} }$	$\frac{ U_{a,\text{theo}} }{ U_{e,\text{theo}} }$	Δt_{exp} in μs	φ_{exp}	φ_{theo}
1	8,15	1,08	1,00	-9,300	-0,09934	-0,01068
10	8,05	1,06	0,99	0,000	-0,000	-0,1064
100	6,66	0,88	0,68	-61,63	-0,6584	-0,8183
1000	0,815	0,108	0,093	-126,40	-1,350	-1,477

Tabelle 2: Mess- und Vergleichswerte beim Tiefpass. $C = 1\text{nF}$ bleibt konstant.

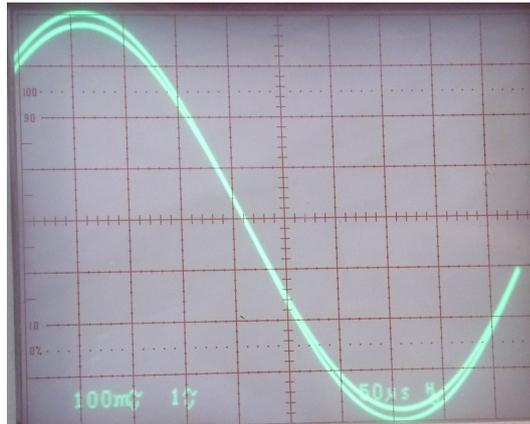


Abbildung 6: Tiefpass, $U(t)$ bei $R = 10\text{k}\Omega$

Hier haben wir wieder das Phänomen, dass die Ausgangsspannung höher als die Eingangsspannung ausfällt. Die Gründe sind die gleichen wie beim Hochpass, nur fallen die Fehler hier größer aus. Negative Phasenverschiebungen bedeuten, dass die Ausgangsspannung der Eingangsspannung hinterherhinkt.

Komischerweise konnten wir beim Widerstand von $10\text{k}\Omega$ keine Phasenverschiebung messen (Abbildung 6), obwohl wir an den betroffenen Bereich bis in den ns-Bereich heranzoomten. Dies machte uns schon während des Versuchs stutzig, da die Phasenverschiebung vom kleineren Widerstand mit $1\text{k}\Omega$ betragsmäßig größer war. Doch auch bei mehrmaligem Wiederholen konnten wir nichts messen. Allerdings passt der gemessene Wert von $1\text{k}\Omega$ sehr gut zum theoretisch errechneten Wert für $10\text{k}\Omega$. Möglicherweise haben wir die Widerstände vertauscht oder die Beschriftung auf dem Widerstand war falsch - wir haben für diesen Versuch einen anderen $10\text{k}\Omega$ -Widerstand als beim Hochpass genommen.

2 Differenzier- und Integrierglieder

2.1 Differenziation einer Dreiecksspannung

Wie in der Vorbereitung gezeigt, kann ein Hochpass als Differenzierglied genutzt werden. Dazu legten wir eine Dreiecksspannung wieder mit $2U_e = 7,58 \text{ V}$ und $f = 1,7 \text{ kHz}$ am Hochpass an, der Kondensator hat wieder eine Kapazität von $C = 1 \text{ nF}$.

In den Abbildungen 8, 9 und 10 sind die abfotografierten Schirme des Oszilloskops für die Widerstände $1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$ und $100 \text{ k}\Omega$ dargestellt. Für $1 \text{ M}\Omega$ haben wir das Schaubild nicht mehr abfotografiert, da dieses Bild sich überhaupt nicht mehr eignete, man hat zwischen Dreiecksspannung und der gemessenen Spannung kaum noch einen Unterschied gesehen.

Man sieht sehr gut, dass das Differenzierglied umso besser arbeitet, je kleiner der Widerstand ist. Das lässt sich auch dadurch erklären, dass bei kleineren Widerständen die Influenzladung durch den Spannungsschub viel schneller abfließt also bei größeren Widerständen. Die erste Messung beeinflusst also kaum die nächste Messung, da bei der nächsten Messung kaum noch Restladung von der ersten Messung vorhanden sind. Bei größeren Widerständen staut sich die Ladung am Kondensator, sodass im Extremfall, wenn also der Widerstand unendlich hoch ist, gar keine Ladung mehr abfließt. In diesem Fall entspricht die Ausgangsspannung der Eingangsspannung und wir messen also dasselbe.

2.2 Integration einer Rechtecksspannung

Als Integrierglied verwendeten wir einen Tiefpass. Die Spannungsamplituden, die Frequenzen und der Kondensator sind die gleichen wie beim Hochpass, allerdings legten wir hier eine Rechtecksspannung an. In den Abbildungen 11, 12 und 13 sind die abfotografierten Schirme des Oszilloskops für die Widerstände $1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$ und $100 \text{ k}\Omega$ abgebildet. Die Graphen mit den Widerständen $1 \text{ k}\Omega$ und $10 \text{ k}\Omega$ ähneln sich stark und sind dazu noch unbrauchbar, deswegen haben wir nur eines davon abfotografiert.

Abbildung 13 auf Seite 9 mit $1 \text{ M}\Omega$ Widerstand ist sehr schön und kommt der Theorie einer Dreiecksspannung am nächsten.

Wie man an den Messdaten des Tiefpasses sehen kann, herrscht am Ausgang eine umso kleinere Spannung, je höher der Widerstand ist (Der gegenteilige Effekt wie beim Hochpass bzw. Differenzierglied). Die Formel für das Integrierglied lautet, wie in der Vorbereitung bereits gezeigt:

$$U_a = \frac{1}{RC} \int (U_e - U_a) dt \quad (6)$$

Die Proportionalität von U_a und U_e ist also umso besser, je kleiner U_a ist. In unserem Versuch erreichten wir das mit einem möglichst großen Widerstand und bestätigten das theoretisch hergeleitete Ergebnis.

2.3 Weitere RC-Kombination

In dieser freieren Aufgabe differenzierten wir eine Rechtecksspannung. Dabei benutzen wir einen $10\text{ k}\Omega$ Widerstand. Besonders schön sieht man, dass die Differenzierkurve an den Unstetigkeitsstellen der Rechtecksspannung gegen unendlich und an den Stellen parallel zur x-Achse gegen 0 geht.

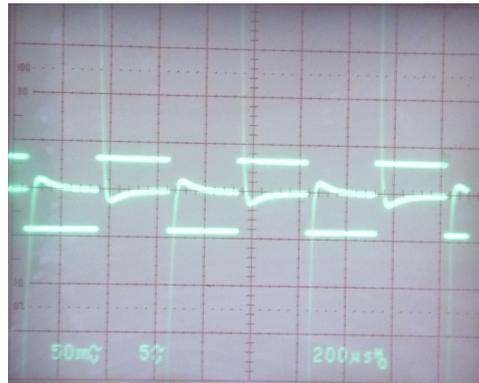


Abbildung 7: Differenzierglied mit Rechtecksspannung, $U(t)$ bei $R = 10\text{ k}\Omega$



Abbildung 8: Differenzierglied
 $U(t)$ bei $R = 1 \text{ k}\Omega$

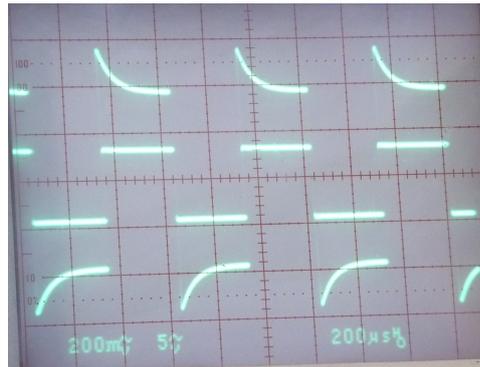


Abbildung 11: Integrierglied
 $U(t)$ bei $R = 1 \text{ k}\Omega$



Abbildung 9: Differenzierglied
 $U(t)$ bei $R = 10 \text{ k}\Omega$



Abbildung 12: Integrierglied
 $U(t)$ bei $R = 100 \text{ k}\Omega$



Abbildung 10: Differenzierglied
 $U(t)$ bei $R = 100 \text{ k}\Omega$

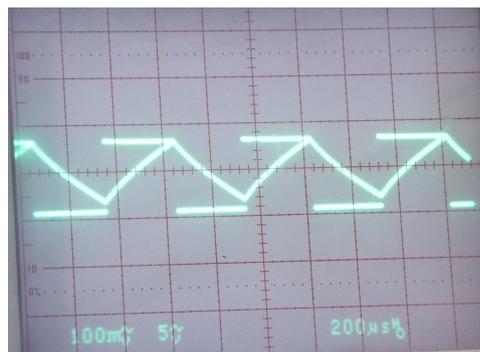


Abbildung 13: Integrierglied
 $U(t)$ bei $R = 1 \text{ M}\Omega$

3 Drosselkette

3.1 Charakteristischer Widerstand

Da am Eingangssignal starke Reflexionen beobachtet wurden (Abbildung 14), haben wir den Abschlusswiderstand Z_A so weit erhöht, bis wir eine möglichst unverfälschte Rechteckspannung bekamen (Abbildung 15). Durch direkte Messung mit einem Multimeter bestimmten wir dann den Wert des Abschlusswiderstandes zu

$$Z_A = 223 \Omega = Z_0$$

Theoretisch ergibt sich mit der Gleichung aus der Vorbereitung ein Wert von

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{96 \mu\text{H}}{2 \cdot 1 \text{nF}}} = 219 \Omega$$

Dies entspricht nahezu unserem bestimmten Wert.

3.2 Grenzfrequenz

Um den Frequenzbereich zu finden, an dem sich U_A stark mit f ändert, haben wir die Skalierungen für die Eingangs- und Ausgangsspannung am Oszilloskop so eingestellt, dass sie dem Verhältnis $\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{10}$ entsprachen. Dann haben wir die Frequenz erhöht, bis die angezeigten Amplituden gleich waren. Dies entspricht der Grenzfrequenz, da auch beobachtet wurde, wie sich f in diesem Bereich stark ändert. Für die Grenzfrequenz lasen wir ab:

$$f_0 = 722 \text{ kHz}$$

Nach der Vorbereitungsmappe gilt für die Grenzfrequenz:

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi\sqrt{96 \mu\text{H} \cdot 2 \cdot 1 \text{nF}}} = 726 \text{ kHz}$$

Auch hier liegt der theoretische Wert sehr nahe an unserem gemessenen Wert.

3.3 Berechnung der Kapazitäten und Induktivitäten

Es gilt nach der Vorbereitung:

$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0} = \frac{223 \Omega}{\pi \cdot 722 \text{ kHz}} = 98,31 \mu\text{H}$$
$$C = \frac{1}{\pi f_0 Z_0} = \frac{1}{\pi \cdot 722 \text{ kHz} \cdot 223 \Omega} = 1,98 \text{ nF}$$

Dies entspricht, da auch schon f_0 und Z_0 sehr nah an den theoretischen Werten lagen, in etwa den angegebenen Daten der Bauteile von $\frac{C}{2} = 1 \text{ nF}$ und $L = 96 \mu\text{H}$.

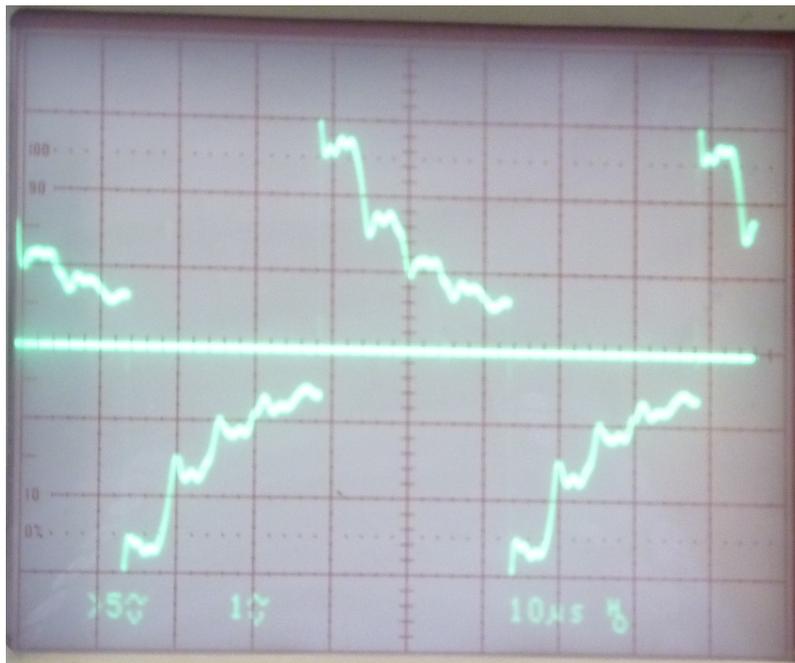


Abbildung 14: Eingangssignal mit Reflexionen am offenen Kettenende, $Z_A = \infty$

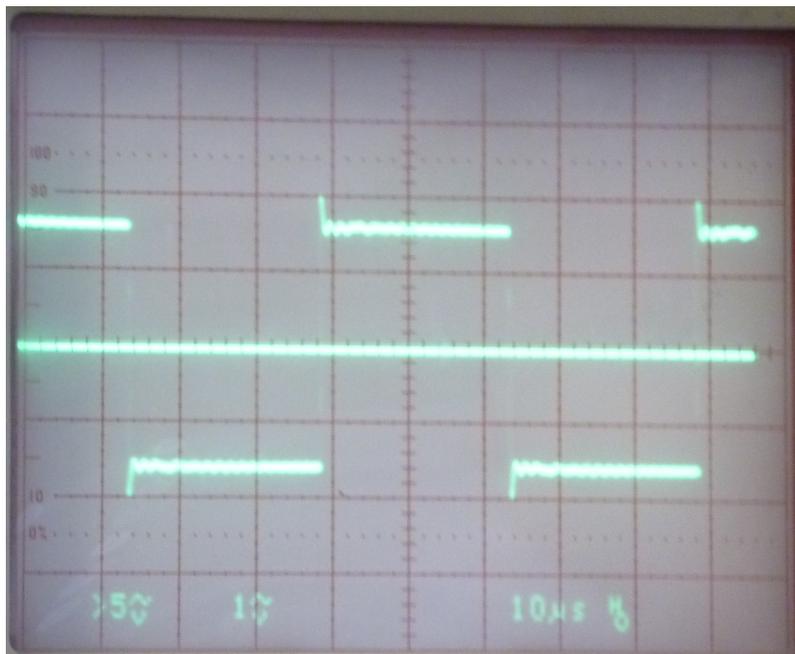


Abbildung 15: Eingangssignal ohne Reflexionen am Kettenende, $Z_A = Z_0$

Frequenz f [kHz]	Phasenverschiebung			theoretisch
	Δt [ns]	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi \cdot \frac{1}{\pi}$	$\Delta\varphi \cdot \frac{1}{\pi}$
10	474,2	0,0298	0,00948	0,00880
100	458,2	0,288	0,0916	0,0880
300	469,6	0,885	0,282	0,271
500	467,8	1,470	0,468	0,484
600	450,4	1,697	0,540	0,619
650	440,2	1,798	0,572	0,706
690	433,0	1,877	0,598	0,799
$f_0 = 722$	430,8	1,964	0,625	0,933

Tabelle 3: Messwerte der Phasenverschiebung eines π -Gliedes

Frequenz f [kHz]	Phasenverschiebung				absolut	theoretisch	Verhältnis $\frac{\Delta\varphi_{6GI}}{\Delta\varphi_{\pi GI}}$
	Δt [ns]	$\Delta\varphi$	$\Delta\varphi \cdot \frac{1}{\pi}$	$\Delta\varphi \cdot \frac{1}{\pi}$	$\Delta\varphi \cdot \frac{1}{\pi}$	$\Delta\varphi \cdot \frac{1}{\pi}$	
10	2702	0,170	0,0540	0,0540	0,0526	5,696	
100	2688	1,689	0,538	0,538	0,528	5,873	
300	651	1,227	0,391	1,609	1,627	5,706	
500	813,5	2,556	0,814	2,814	2,902	6,013	
600	317	1,195	0,381	3,619	3,716	6,702	
650	233	0,952	0,303	4,303	4,237	7,523	
690	500,5	2,170	0,691	4,691	4,792	7,844	
$f_0 = 722$	419,0	1,901	0,605	5,395	5,599	8,632	

Tabelle 4: Messwerte der Phasenverschiebung einer 6-Gliedrigen Vierpolkette, auch im Verhältnis zur Verschiebung eines π -Gliedes

3.4 Phasenverschiebung

Um die Phasenverschiebung eines π -Gliedes sowie der ganzen Drosselkette zu untersuchen, haben wir – nach Justierung der Nulllinie ohne Eingangssignal und reflexionsfreien Abschluss der Kette – die Ein- und Ausgangsspannung am Oszilloskop dargestellt. Dabei haben wir einen großen y-Maßstab gewählt, sodass die Nulldurchgänge sehr gut ablesbar waren. Die Messwerte haben wir mittels Gleichung aus der Vorbereitung ($\Delta\varphi = 2\pi f \Delta t$) ins Bogenmaß umgerechnet und auch als Vielfache von π aufgetragen. Darüber hinaus wurde auch der theoretische Wert, errechnet über $\Delta\varphi = 2n \arcsin\left(\frac{f}{f_0}\right)$ (mit theoretischem f_0), angegeben.

Tabelle 3 zeigt die Messwerte eines π -Gliedes. Für kleine Frequenzen stimmen Messwerte und berechnete Werte noch überein, aber für höhere Frequenzen zeigen sich starke Abweichungen.

Tabelle 4 zeigt die Messwerte eines π -Gliedes. Dabei musste die Phasenverschiebung noch korrigiert werden, um die absolute Verschiebung zu erhalten: Falls die Frequenz

Phasenverschiebung $\Delta\varphi$	Frequenz f [kHz]
π	$f_1 = 189$
2π	$f_2 = 365$
3π	$f_3 = 524$
4π	$f_4 = 631$
5π	$f_5 = 700$

Tabelle 5: Messwerte der Frequenzen mit $n \cdot \pi$ -Phasenverschiebung an einer 6-Gliedrigen Vierpolkette

nach Tabelle 5 zwischen $(2n + 1)$ und $(2n + 2)$ π -Phasenverschiebung lag, haben wir den Phasenwinkel von $2\pi(n + 1)$ abgezogen, andernfalls haben wir $2n\pi$ addiert.

Auch hier stimmen für kleine Frequenzen Messwerte und berechnete Werte in etwa überein und für höhere Frequenzen zeigen sich starke Abweichungen.

Die Phasenverschiebung entsprach Anfangs etwa dem 6-fachen der Phasenverschiebung eines einzelnen π -Gliedes, für hohe Frequenzen allerdings wurde das Verhältnis immer größer (Tabelle 4).

In Tabelle 5 haben wir nun untersucht, bei welchen Frequenzen eine $n \cdot \pi$ -Phasenverschiebung auftritt. Dabei haben wir die Kurven der Ein- und Ausgangsspannung mittels des Oszilloskops, je nach $(2n)$ oder $(2n + 1)$ - π -Verschiebung, substrahiert oder addiert und beobachtet, bei welcher Frequenz die Amplitude der resultierenden Kurve am geringsten ist.

Aus diesen Werten lässt sich auch die Grenzfrequenz f_0 bestimmen:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot 6 \arcsin\left(\frac{f}{f_0}\right) \Leftrightarrow f = \sin(\Delta\varphi) \cdot \frac{f_0}{12}$$

An die Messwerte aus Tabelle 5 haben wir die Funktion $f(\Delta\varphi)$ fitten lassen (Abbildung 16 auf der nächsten Seite) und erhalten:

$$f_0 = (729 \pm 3) \text{ kHz}$$

Weil wir diesen Wert aus mehreren Messungen gewonnen haben, ist er auch genauer. Da der theoretische Wert innerhalb des statistischen Fehlerintervalls liegt, lässt sich somit die Grenzfrequenz präzise bestimmen.

3.5 Reflexion am Kettenende

Das Ende der Drosselkette haben wir kurzgeschlossen ($Z_A = 0$) und an den Anfang haben wir einen 200Ω -Widerstand zur Vermeidung von Reflexionen am Kettenanfang in Reihe eingebaut.

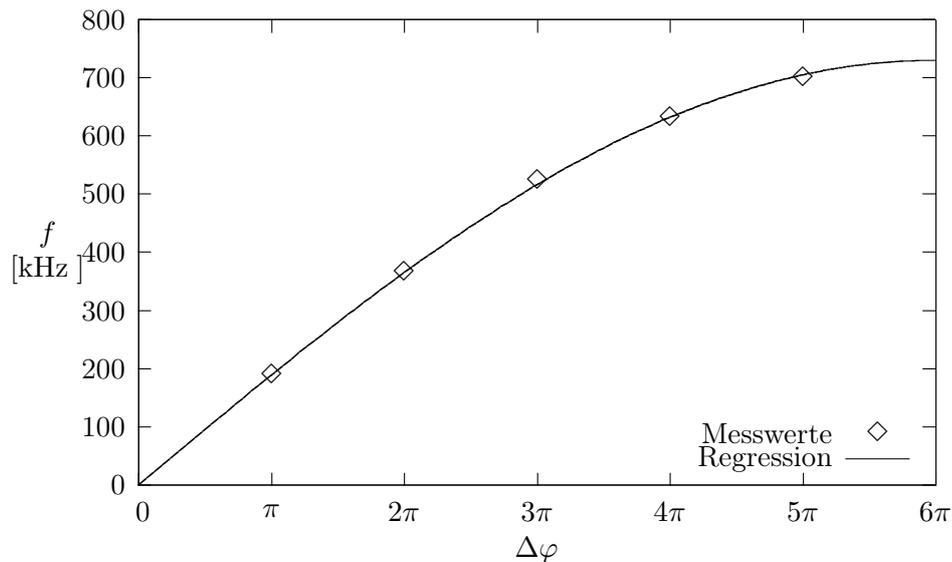


Abbildung 16: Messwerte aus Tabelle 5 für die frequenzabhängige Phasenverschiebung
 Regressionskurve: $y = f_0 \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2 \cdot 6}\right)$, mit $f_0 = (729 \pm 3)$ kHz

Erwartet wurde, dass die resultierende Spannung einer stark abgeschwächten Rechteckspannung gleicht. Tatsächlich wurde eine Art Treppenverlauf wie in Abbildung 17 beobachtet. Dies liegt daran, dass anscheinend bei jedem π -Glied schon Reflexionen auftreten.

4 Koaxialkabel

4.1 Charakteristischer Widerstand

Den charakteristischen Widerstand Z_0 des Koaxialkabels haben wir wie in Aufgabe 3.1 bestimmt, allerdings haben wir den Wert des Widerstandes Z_A nur auf der Skala abgelesen:

$$Z_0 = Z_A \approx 50 \Omega$$

Dies erscheint schlüssig, da 50Ω der charakteristische Widerstand eines handelsüblichen Koaxialkabels ist (außer für Rundfunk- und Fernsehempfangstechnik).

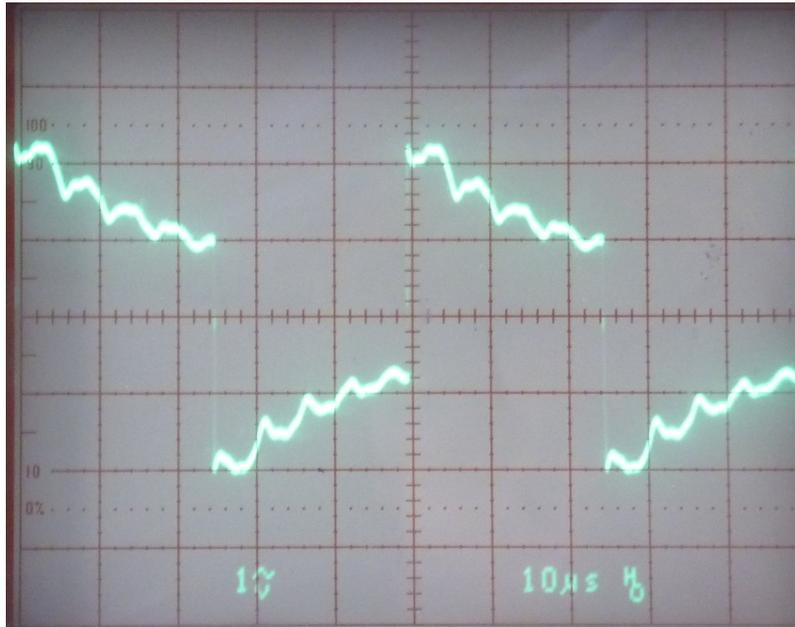


Abbildung 17: Eingangssignal mit Reflexionen am kurzgeschlossenen Kettenende,
 $Z_A = 0$

4.2 Verzögerungszeit (direkt)

Am Kabel haben wir eine Rechteckspannung angelegt und die Verzögerung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal mit dem Oszilloskop bestimmt (Abbildung 18):

$$\tau' = \frac{\Delta t}{l} = \frac{55,2 \text{ ns}}{10,0 \text{ m}} = 5,52 \frac{\text{ns}}{\text{m}}$$

4.3 Verzögerungszeit (über Reflexion)

Wir haben auch hier eine Rechtecksspannung angelegt, aber das andere Ende des Koaxialkabels kurzgeschlossen. Dadurch war für das Eingangssignal auf dem Oszilloskop zu erkennen, wann das reflektierte Signal wieder am Eingang angekommen ist und sich mit dem ursprünglichen Signal überlagert hat. Für diese Signallaufzeit haben wir gemessen (Abbildung 19 auf der nächsten Seite):

$$\tau' = \frac{\Delta t}{2l} = \frac{111 \text{ ns}}{2 \cdot 10,0 \text{ m}} = 5,55 \frac{\text{ns}}{\text{m}}$$

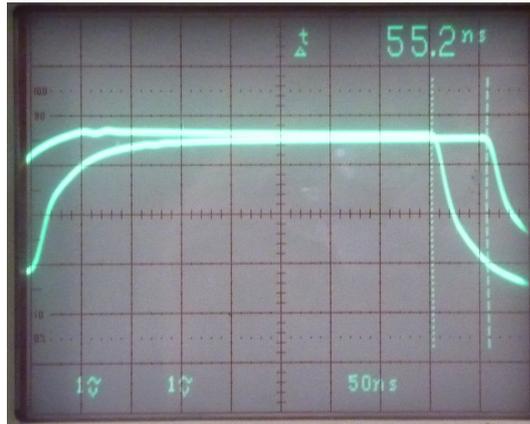


Abbildung 18: Direkte Messung der Verzögerungszeit τ'

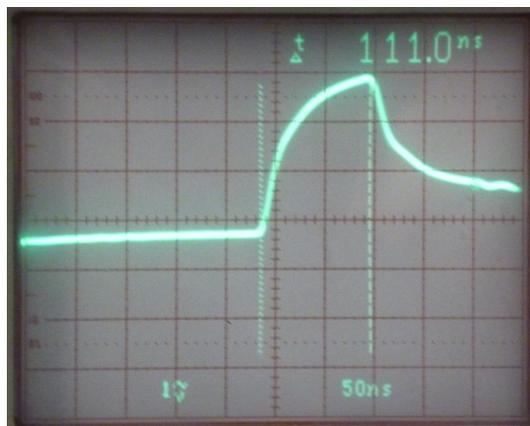


Abbildung 19: Messung der Verzögerungszeit τ' über Reflexion

4.4 Dielektrizitätskonstante

Mithilfe dieser Messdaten und den geometrischen Kabeldaten lässt sich die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums im Kabel auf mehrere Weisen bestimmen:

$$\varepsilon_r \{C_l, r_i, r_a\} = \frac{C_l}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = \frac{925 \text{ pF}}{2\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 10,0 \text{ m}} \ln\left(\frac{1,75 \text{ mm}}{0,5 \text{ mm}}\right) = 3,607$$

$$\varepsilon_r \{\tau'\} = \frac{c^2 \tau'^2}{\mu_r} = \frac{(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \cdot \tau'^2}{1} \quad \varepsilon_r \left\{5,52 \frac{\text{ns}}{\text{m}}\right\} = 2,742 \quad \varepsilon_r \left\{5,55 \frac{\text{ns}}{\text{m}}\right\} = 2,772$$

$$\varepsilon_r \{Z_0, r_i, r_a\} = \frac{1}{4\pi^2 Z_0^2} \frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^2 = \frac{1}{4\pi^2 (50 \Omega)^2} \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 1}{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}} \ln\left(\frac{1,75 \text{ mm}}{0,5 \text{ mm}}\right)^2 = 2,257$$

Zwar liegen diese errechneten Werte alle in derselben Größenordnung, aber sie unterscheiden sich dennoch alle deutlich voneinander.