

# Praktikum Klassische Physik I

## *Versuchsvorbereitung:* P1-72, 74, 75: Bestimmung von $\frac{e}{m}$ des Elektrons

Christian Buntin  
*Gruppe Mo-11*

Karlsruhe, 2. November 2009

### Inhaltsverzeichnis

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| <b>1</b> | <b><math>\frac{e}{m}</math>-Bestimmung mit dem Fadenstrahlrohr</b>              | <b>2</b> |
| 1.1      | Messung der Hallspannung . . . . .  | 4        |
| 1.2      | Eichen der Hallsonde . . . . .  | 4        |
| 1.3      | Überprüfung der Feldhomogenität . . . . .                                       | 4        |
| 1.4      | Messung des Durchmessers der Elektronenkreisbahnen im Fadenstrahlrohr . . . . . | 5        |
| <b>2</b> | <b><math>\frac{e}{m}</math>-Bestimmung nach der Methode von Busch</b>           | <b>5</b> |
| 2.1      | Vorbereitende Versuche . . . . .  | 7        |
| 2.2      | Messung . . . . .   | 7        |

## 1 $\frac{e}{m}$ -Bestimmung mit dem Fadenstrahlrohr

Die Versuchsanordnung des Fadenstrahlrohres besteht aus einem evakuierten Glaskolben mit einer Elektronenkanone, welcher in einer Helmholtzspulen-Anordnung steht. Dadurch wird ein erzeugter Elektronenstrahl durch ein senkrecht zur Bahn wirkendes Magnetfeld auf eine Kreisbahn gelenkt. Anhand des Radius dieser Kreisbahn, des Spulenstroms der Helmholtzspulen und der Beschleunigungsspannung der Elektronenkanone lässt sich der Quotient  $\frac{e}{m}$  des Elektrons bestimmen.

### Funktionsweise der Hall-Sonde

Eine Hall-Sonde besteht aus einem Plättchen, welches von einem Strom  $I$  durchflossen wird. Wird dieses senkrecht zur Stromflussrichtung in ein Magnetfeld  $\vec{B}$  gebracht, so werden die Ladungsträger der Ladung  $q$  durch die Lorentzkraft  $\vec{F}_L$  quer zum Magnetfeld und zur Stromflussrichtung abgelenkt, weshalb sich ein Elektrisches Feld  $\vec{E}$  aufbaut.

Für die Kraft auf einen Ladungsträger gilt:

$$\vec{F} = \vec{F}_L = q (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{E} \cdot q \quad (1.0-1)$$

wobei  $\vec{v}$  die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger ist.

Ist  $\vec{B}$  senkrecht zu  $\vec{v}$  und  $d$  die Breite des Plättchens in Richtung des  $\vec{E}$ -Feldes, so gilt:

$$qvB = Eq = \frac{U_{\text{Hall}}}{d} q \Leftrightarrow B = \frac{U_{\text{Hall}}}{vd} \quad (1.0-2)$$

Die Driftgeschwindigkeit lässt sich über die Stromflussdichte  $\vec{j}$  bestimmen, wobei  $b$  die Dicke des Plättchens in Richtung des  $\vec{B}$ -Feldes,  $q$  die Ladung der Ladungsträger und  $n$  die Ladungsträgerdichte ist:

$$\vec{j} = \frac{\vec{I}}{A} = \frac{\vec{I}}{d \cdot b} = qn\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{\vec{I}}{dbqn} \quad (1.0-3)$$

Somit gilt:

$$B = U_{\text{Hall}} \cdot \frac{bqn}{I} \Rightarrow B \propto U_{\text{Hall}} \quad (1.0-4)$$

Der Proportionalitätsfaktor lässt sich somit durch sehr genaue Kenntnis der verwendeten Hall-Sonde bestimmen. Alternativ lässt sich dieser auch einfach experimentell durch Eichung wie in Kapitel 1.2 beschrieben bestimmen.

### Funktionsweise des Fadenstrahlrohres

Durch die Heizspannung (Hier: 6,3 V Wechselspannung an die Anschlüsse H) wird die Glühkathode erhitzt und setzt Elektronen frei. Diese werden in einem negativ geladenen Wehneltzylinder gebündelt (Hier: -20 V an Anschluss W). Danach werden die Elektronen durch eine positiv geladene, kegelförmige Anode mit einer Öffnung an der Spitze angezogen und dadurch beschleunigt.

In der Beschleunigungsphase von der Kathode zur Anode erfährt ein Elektron die Kraft  $F = E \cdot e$  entlang des Weges  $S$  zwischen den Elektroden, wobei  $e$  die Ladung eines Elektrons und  $E$  das elektrische Feld zwischen den Elektroden ist. Somit hat ein Elektron beim Verlassen des Beschleunigungsapparates durch die kegelförmige Anode die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \int_S F ds = \int_0^d E e ds = \int_0^d \frac{U}{d} e ds = \frac{U}{d} e \cdot d = U \cdot e \quad (1.0-5)$$

mit der Beschleunigungsspannung  $U$  (Hier: Zwischen 0 V und 300 V an Anschlüsse A+ und A-).

Daraus folgt für die Geschwindigkeit  $v$  eines austretenden Elektrons der Masse  $m$ :

$$W_{\text{kin}} = U \cdot e = \frac{1}{2} m v^2 \Leftrightarrow v^2 = 2U \frac{e}{m} \Rightarrow v = \sqrt{2U \frac{e}{m}} \quad (1.0-6)$$

Und für den Quotienten  $\frac{e}{m}$  gilt:

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U} \quad (1.0-7)$$

## Funktionsweise des Helmholtzspulen-Paares

Eine Helmholtzspulenpaar besteht aus zwei schmalen, axial nebeneinander angeordneten, in gleicher Richtung von Strom durchflossenen gleichen Spulen. Dabei entspricht der Radius einer Spule dem Abstand der Spulen zueinander.

Für das Magnetfeld einer Leiterschleife mit  $N$  Windungen entlang der axialen  $x$ -Achse gilt:

$$B_x(x) = N \cdot \frac{1}{2} \mu_0 I R^2 \frac{1}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.0-8)$$

Somit gilt für das Magnetfeld zwischen den einzelnen Spulen:

$$B = B_x \left( -\frac{1}{2} R \right) + B_x \left( \frac{1}{2} R \right) \quad (1.0-9)$$

$$= \frac{1}{2} N \mu_0 I R^2 \left( \frac{1}{(R^2 + \frac{1}{4} R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(R^2 + \frac{1}{4} R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (1.0-10)$$

$$= N \mu_0 I R^2 \frac{1}{(\frac{5}{4} R^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.0-11)$$

$$= \left( \frac{4}{5} \right)^{\frac{3}{2}} N \mu_0 I R^2 \frac{1}{R^3} \quad (1.0-12)$$

$$\approx 0,7155 \cdot \mu_0 \cdot N \cdot \frac{I}{R} \quad (1.0-13)$$

Die Besonderheit der Anordnung besteht darin, dass für das Magnetfeld in der Mitte der Spulen die ersten drei Ableitungen verschwinden. Das Feld ist somit zwischen den Spulen annähernd konstant und kann für Versuche wie diesen verwendet werden.

## Bahnkurve eines Elektrons im Fadenstrahlrohr

In einem Magnetfeld  $\vec{B}$  wirkt auf ein Elektron der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B})$ . Da in diesem Versuchsaufbau  $\vec{v}$  senkrecht zu  $\vec{B}$  steht, wird das Elektron durch die Zentripetalkraft  $\vec{F}_{ZP} = \vec{F}_L$  auf eine Kreisbahn mit Radius  $r$  gelenkt.

Somit gilt für den Radius der Bahn:

$$F_{ZP} = |\vec{F}_L| = e \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow r = \frac{mv}{eB} \quad (1.0-14)$$

Für die Geschwindigkeit  $v$  des Elektrons folgt:

$$v = \frac{e}{m} Br \quad (1.0-15)$$

### 1.1 Messung der Hallspannung

Zur Bestimmung des Magnetfeldes wird eine dritte Spule aufgebaut, sodass die Spulenanordnung mit der Messplatte der Anordnung mit dem Fadenstrahlrohr entspricht, dabei werden die Spulen in Reihe geschaltet. Die Hallspannung wird an den vorgesehenen Stellen für die Ströme 1,0 A, 1,5 A und 2,0 A gemessen.

### 1.2 Eichen der Hallsonde

Da nach Gleichung 1.0-4  $U_{\text{Hall}}$  proportional zum Magnetfeld  $B$  ist, muss durch Eichung der Proportionalitätsfaktor  $\frac{B}{U_{\text{Hall}}}$  bestimmt werden, um die Sonde zum Messen zu verwenden.

Dazu wird mit dieser Hallsonde die Hallspannung bei verschiedenen Spulenströmen  $I$  (Maximal 0,8 A!) gemessen. Das jeweils dazugehörige Magnetfeld  $B = \mu_0 I \frac{n}{L}$  wird berechnet und über  $U_{\text{Hall}}$  aufgetragen. Daraus bestimmt man die Eichgerade  $B(U_{\text{Hall}})$ , deren Steigung dem Proportionalitätsfaktor entspricht.

Die Hallspannungen sollten hier im Bereich der Hallspannungen aus dem vorherigen Kapitel liegen, damit das Ergebnis nicht durch unterschiedliche Randbedingungen aufgrund von unterschiedlichen Größenordnungen verfälscht wird.

### 1.3 Überprüfung der Feldhomogenität

Für das Mittenfeld ergibt sich nach Gleichung 1.0-13 ein berechneter Wert von

$$B = 0,7155 \cdot \mu_r \cdot n \cdot \frac{I}{R} \quad (1.3-1)$$

Dieser so berechnete Wert wird mit den gemessenen Werten aus Kapitel 1.1 verglichen. Hierbei wird überprüft, ob das Magnetfeld genügend homogen ist. Es wird erwartet, dass die Messwerte etwa den berechneten entsprechen.

## 1.4 Messung des Durchmessers der Elektronenkreisbahnen im Fadenstrahlrohr

Die Zusatzspule wird wieder abgebaut. Das Fadenstrahlrohr und die Spulen werden nach Vorgabe angeschlossen und so eingestellt, dass sich eine Kreisbahn und keine Spiralbahn bildet. Die Elektronenbahn ist als Resultat von Zusammenstößen einiger Elektronen mit  $H_2$ -Molekülen als blaue Kreisbahn zu sehen. Deren Durchmesser wird parallaxenfrei mittels verschiebbarer Marken vor der Spule und eines Spiegels hinter der Spule gemessen.

Durch Einsetzen von Gleichungen 1.0–12 und 1.0–15 in Gleichung 1.0–7 lässt sich der Quotient  $\frac{e}{m}$  bestimmen:

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U} = \frac{\left(\frac{e}{m}Br\right)^2}{2U} \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{2U}{\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} N\mu_0 IR^2\right)^2 r^2} = \quad (1.4-1)$$

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{I^2} \cdot U \cdot \frac{125}{32 \cdot N^2 \mu_0^2 R^4} = \boxed{\frac{e}{m} = \frac{1}{d^2} \cdot \frac{1}{I^2} \cdot U \cdot \frac{125}{8 \cdot N^2 \mu_0^2 R^4}} \quad (1.4-2)$$

Dazu muss der Durchmesser  $d$  der Kreisbahn in Abhängigkeit der Anodenspannung  $U$  und des Spulenstromes  $I$  gemessen werden:

- Einmal in Abhängigkeit der Anodenspannung (von 100 V bis 250 V) bei zwei Spulenströmen zwischen 1 A und 2 A,
- und einmal in Abhängigkeit des Spulenstroms (von 1 A bis 2 A) bei zwei Anodenspannungen zwischen 100 V und 250 V.

Diese Messreihen werden zur Kontrolle erst getrennt aufgetragen: Für das Diagramm aus a) wird  $d^2$  über  $U$  aufgetragen (da  $d^2 \propto U$ ), für b) wird  $d$  über  $\frac{1}{I}$  aufgetragen (da  $d \propto \frac{1}{I}$ ).

Zum Schluss wird  $d^2$  über  $\frac{U}{I^2}$  aufgetragen, da  $d^2 \propto \frac{U}{I^2}$  ist. Aus diesem Diagramm wird die Steigung  $k$  der Ausgleichsgeraden bestimmt. Da gilt:

$$\frac{d^2}{\frac{U}{I^2}} = \frac{d^2 I^2}{U} = k \Leftrightarrow \frac{U}{d^2 I^2} = \frac{1}{k} \quad (1.4-3)$$

folgt nach Einsetzen in Gleichung 1.4–2 für  $\frac{e}{m}$ :

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{k} \cdot \frac{125}{8 \cdot N^2 \mu_0^2 R^4} \quad (1.4-4)$$

## 2 $\frac{e}{m}$ -Bestimmung nach der Methode von Busch

Dieser Versuch besteht aus einer Kathodenstrahlröhre in einer Spule. In der Spule liegt ein Magnetfeld parallel zum Elektronenstrahl vor. Wenn der Strahl aber durch ein Kondensatorplatten-Paar abgelenkt wird, bildet er eine Spiralbahn aus. Wird nun

das Magnetfeld so eingestellt, dass der Strahl trotz ändernder Ablenkung immer auf den selben Punkt auf dem Schirm trifft, so durchläuft der Strahl genau eine Spirale. In diesem Fall lässt sich aus den Versuchsparametern der Quotient  $\frac{e}{m}$  bestimmen.

### Verhalten eines Elektrons in der Kathodenstrahlröhre

Solange das Magnetfeld  $\vec{B}$  parallel zum Elektronenstrahl verläuft, hat die keine Auswirkungen. Da die Deflektorspannung aber eine Wechselspannung ist, werden die Elektronen am Deflektorzentrum nach oben oder unten abgelenkt. Daher erscheint bei ausgeschaltener Spule auch eine Linie auf dem Schirm. Zusätzlich zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$  parallel zum  $\vec{B}$ -Feld tritt nun eine Komponente  $\vec{v}_\perp$  orthogonal zum  $\vec{B}$ -Feld auf.

Wird das Magnetfeld aktiviert, so wirkt auf das Elektron die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = q(\vec{v}_\perp \times \vec{B})$ . Diese wirkt als Zentripetalkraft immer in Richtung der Hauptachse der Röhre und zwingt das Elektron auf eine Spiralbahn. Für diese gilt mit der Umlaufzeit  $T$ :

$$F_L = F_{ZP} = ev_\perp B = \frac{mv_\perp^2}{r} \Leftrightarrow v_\perp = \frac{e}{m} Br = \frac{s}{T} = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{B \frac{e}{m}} \quad (2.0-5)$$

Wenn bei dieser Bahn genau eine vollständige Spirale durchlaufen wird, erscheint der Strahl trotz Ablenkung an den Deflektorplatten als einzelner Punkt auf dem Schirm. In diesem Fall entspricht der Abstand des Deflektorzentrums zum Schirm genau der Ganghöhe  $h$  der Spiralbahn. Für diese gilt:

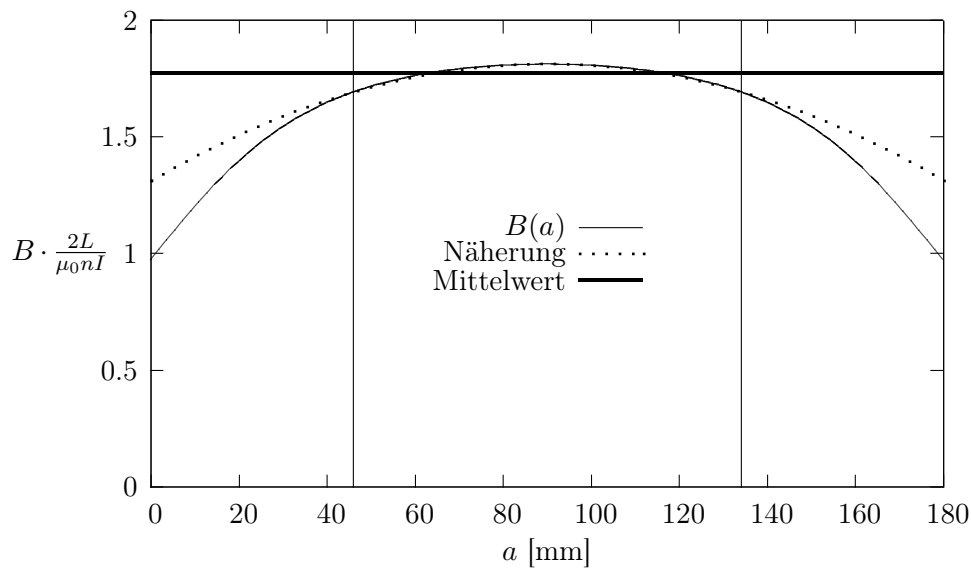
$$h = vT \Leftrightarrow v = \frac{h}{T} = \frac{hB}{2\pi} \frac{e}{m} \quad (2.0-6)$$

Durch Einsetzen in Gleichung 1.0-7 folgt für  $\frac{e}{m}$ :

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2U} = \frac{\left(\frac{hB}{2\pi} \frac{e}{m}\right)^2}{2U} \Leftrightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{h^2 B^2}} \quad (2.0-7)$$

Da hier allerdings keine langgestreckte Spule vorliegt und das  $B$ -Feld somit nicht homogen ist (siehe Abbildung 1), muss das  $B$ -Feld gemittelt werden. Dazu werden die Werte des  $B$ -Feldes an den Stellen  $a = 46$  mm,  $a - b = 90$  mm und  $b = 134$  mm berechnet. Diese Werte entsprechen den Positionen des Deflektorzentrums, des Mittelpunktes der Spule und des Schirmes. Mit Hilfe der Keplerschen Fassregel lässt sich der Mittelwert längs dieser Strecke annähern:

$$\bar{B} \approx \frac{1}{6} \left( B(a) + B(b) + 4 \cdot B\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) \approx \mu_0 I \frac{n}{L} \cdot 0,8862 \quad (2.0-8)$$



**Abbildung 1:**  $B$ -Feld der verwendeten Spule mit quadratischer Näherung für die Keplersche Fassregel zwischen den vertikalen Geraden

## 2.1 Vorbereitende Versuche

Zuerst macht man sich mit der Apparatur vertraut, indem man die Spule und die Kathodenstrahlröhre nach Vorgabe anschließt. Es wird eine niedrige Beschleunigungsspannung von ca. 500 V eingestellt. Die Deflektorspannung wird so eingestellt, dass der Strich auf dem Schirm seine maximale Länge erreicht. Strahlintensität und Schärfe werden optimal eingestellt.

Nun wird der Spulenstrom so eingestellt, dass sich alle Elektronen auf einen möglichst kleinen Fleck treffen. Die Elektronen durchlaufen nun genau eine Spirale. Der Strom wird weiter erhöht, bis zwei Spiralen durchlaufen werden und somit wieder nur ein kleiner Fleck zu sehen ist.

## 2.2 Messung

Es wird der benötigte Spulenstrom gemessen, welcher bei Spannungen von 500 V bis 700 V (in 25 V-Schritten) benötigt wird, um eine Einstellung wie in der letzten Aufgabe zu erhalten. Zur Auswertung wird  $U$  über  $I^2$  aufgetragen und die Steigung  $k$  der Ausgleichsgeraden bestimmt. Somit gilt für  $k$ :

$$k = \frac{U}{I^2} \quad (2.2-1)$$

Für  $\frac{e}{m}$  erhält man nach Einsetzen von Gleichung 2.0-8 in Gleichung 2.0-7:

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{h^2 B^2} \approx \frac{8\pi^2 U}{h^2 (\mu_0 I \frac{n}{L} \cdot 0,8862)^2} = \boxed{k \cdot \frac{8\pi^2 L^2}{h^2 \mu_0^2 n^2 \cdot 0,8862^2}} \quad (2.2-2)$$