

Praktikum Klassische Physik II

# Versuchsauswertung:

# Auflösungsvermögen

(P2-10)

Christian Buntin, Jingfan Ye

*Gruppe Mo-11*

Karlsruhe, 28. Juni 2010

## Inhaltsverzeichnis

1	Auflösungsvermögen des Auges	2
1.1	Experimentelle Bestimmung . . . . .	2
1.2	Vergleich mit der Theorie . . . . .	2
2	Vergrößerung einer Lupe	3
3	Gesamtvergrößerung eines Mikroskops	3
4	Vergrößerung der einzelne Objektive	4
5	Bestimmung von Spaltbreiten und des Haardurchmessers	4
6	Bestimmung der numerischen Apertur A	5
7	Das Leben im Wassertropfen	5
8	Justieren des Gitterspektrometers	6
9	Bestimmung der Gitterkonstanten	6
10	Bestimmung des Wellenlängenabstandes der Na-Doppellinie	7

# 1 Auflösungsvermögen des Auges

## 1.1 Experimentelle Bestimmung

Wir haben die Entfernung  $s$  bestimmt, aus der Christian Buntin einzelne Linien mit Abstand  $a$  eines schwarz-weißen Balkenmusters gerade noch unterscheiden konnte. Daraus folgt dann der Mindestsehwinkel  $\alpha$  zu

$$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$$

und für die Mindestseparation  $a_{\min}$  erhält man:

$$a_{\min} = s_0 \tan \alpha$$

mit der deutlichen Sehweite  $s_0 = 25$  cm.

Strichabstand $a$ [mm]:	1,98	1,49	1,00
Entfernung $s$ [m]:	5,25	3,45	1,90
Mindestsehwinkel $\alpha$ :	0,022°	0,025°	0,030°
Mindestseparation $a_{\min}$ [mm]:	0,09	0,11	0,13

Damit erhalten wir für den Mindestsehwinkel  $\alpha$  mit statistischem Fehler:

$$\alpha = (0,026 \pm 0,005)^\circ$$

und für die Mindestseparation  $a_{\min}$  bei  $s_0$ :

$$a_{\min} = (0,11 \pm 0,02) \text{ mm.}$$

## 1.2 Vergleich mit der Theorie

Bei der theoretischen Betrachtung in der Vorbereitung erhielten wir für den Mindestsehwinkel einen Wert von  $0,0105^\circ$ . Unser gemessener Wert liegt allerdings deutlich darüber. Dies kann mehrere Ursachen haben. Zum einen ging die Theorie von einer Wellenlänge von 550 nm aus, wobei im Experiment Tageslicht, welches ein ganzes Spektrum von Wellenlängen beinhaltet, vorlag. Zum Anderen war das Streifenbild schwarz-weiß, in der Mitte der Netzhaut des Auges sitzen allerdings nur Farbrezeptoren, die viel unempfindlicher als die Helligkeitsrezeptoren sind. Durch die schlechten Lichtverhältnisse im Flur, wo dieses Experiment durchgeführt wurde, wurden diese Rezeptoren nur schwach angeregt, wodurch das Auflösungsvermögen des Auges vermindert wurde.

Auch war der Punkt, ab dem die einzelnen Linien gerade noch voneinander unterschieden werden konnten, schwer zu ermitteln. Dieser hing stark vom subjektivem Eindruck des Probanden ab, da es nicht eindeutig war, ob man einzelne Linien noch getrennt erkennen konnte, oder nicht.

Also liegen die Abweichungen an den anatomischen Gegebenheiten des menschlichen Auges und am persönlichen Empfinden des Probanden.

## 2 Vergrößerung einer Lupe

Wir hielten uns die Lupe aus dem Inventar dieses Versuchs dicht vor das Auge und betrachteten ein Maßband so, dass es durch die Lupe scharf abgebildet wird. Dabei nahmen wir einen Strich mit einem realen Abstand von 1 mm durch die Lupe vergrößert als 2 mm wahr. Ein weiterer Vergleich zwischen realer und vergrößerter Länge waren 5 mm zu 10 mm. Wir schlossen damit auf eine 2-fache Vergrößerung der Lupe.

Anschließend bestimmten wir die Brennweite  $f$  der Linse. Wir hielten die Lupe ins nahezu parallele Sonnenlicht und variierten den Abstand der Lupe zu einem Gegenstand, bis die Lupe das einfallende Licht auf einen Punkt auf dem Gegenstand fokussiert hat. Der Abstand vom Gegenstand zur Lupe entspricht der Brennweite  $f$ , welchen wir mit einem Geodreieck abmaßen. Wir maßen nach mehrmaliger Messung  $f = 6$  cm. Mit der deutlichen Sehweite  $s_0 = 25$  cm ergibt sich damit eine Vergrößerung  $V$  von

$$V = \frac{s_0}{f} = 4,17.$$

Die Ergebnisse für Vergrößerung liegen bei den beiden Messung weit auseinander, obwohl wir mehrmals die Messungen durchgeführt haben. Außerdem kamen wir beide, Christian und Jingfan, auf dieselben Vergrößerungen. Die Fehlerquellen könnten bei der ersten Methode daher rühren, dass die Abschätzung der Vergrößerung sehr ungenau ist, da das Auge sowohl auf das Maßband, das man vergrößert, fokussieren muss, als auch auf ein anderes achten muss, das eben dieses vergrößerte Bild misst. Man sieht eines der beiden Bilder immer verschwommen, wodurch man zu groben Abschätzungen gezwungen ist. Die zweite Methode hat den Nachteil, dass die deutliche Sehweite  $s_0$  von Person zu Person unterschiedlich ist. Möglicherweise liegt sie bei uns beiden deutlich unter 25 cm, sodass die Vergrößerung für uns niedriger ausfällt.

## 3 Gesamtvergrößerung eines Mikroskops

Um die Gesamtvergrößerung eines Mikroskops zu bestimmen, haben wir mit einem Auge durch das Mikroskop eine Skala (2 mm lang, mit 200 Skalenstrichen) und mit dem anderen Auge Millimeterpapier im Abstand der deutlichen Sehweite betrachtet. Dabei wurden die beiden Skalen überlagert und es konnte abgelesen werden, welche Strecke  $b$  der Skala unter dem Mikroskop der Strecke  $a$  auf dem Millimeterpapier, welches mit bloßem Auge betrachtet wurde, entsprach. Aus deren Quotient lässt sich damit die Vergrößerung  $V = \frac{a}{b}$  des Mikroskops bestimmen. Diese wurde mit der theoretischen Vergrößerung verglichen, welche sich aus dem Produkt aus gegebener Objektiv- (4-, 10- oder 40-fach) und Okularvergrößerung (10-fach) ergab.

Da wir das Millimeterpapier auf  $\delta a = 1$  mm und die Skala unter dem Mikroskop auf  $\delta b = 0,005$  mm genau ablesen konnten, erhalten wir für den systematischen Fehler  $\delta V$  der Vergrößerung:

$$\delta V = \frac{1}{b} (\delta a + V \cdot \delta b). \quad (3.1)$$

Wir erhalten:

	Objektiv:	1	2	3
Strecke $a$ ohne Mikroskop betrachtet [mm]:		20	30	40
Strecke $b$ durch Mikroskop betrachtet [mm]:		0,50	0,35	0,10
Gemessene Vergrößerung $V \pm \delta V$ :		$40 \pm 2,4$	$86 \pm 4,1$	$400 \pm 30$
Theoretische Vergrößerung:		40	100	400

In den meisten Fällen stimmt unsere Messung also genau mit der Theorie überein. Die Abweichung bei 100-facher Vergrößerung lässt sich mit der Schwierigkeit erklären, mit der das Ablesen verbunden war. Denn es wurde mit jedem Auge ein anderes Bild betrachtet, welche im Gehirn überlagert werden mussten, was eine große Herausforderung für den Experimentator darstellte.

## 4 Vergrößerung der einzelne Objektive

Um die tatsächliche Vergrößerung der einzelnen Objektive zu bestimmen, haben wir ein Okular mit integrierter Messskala benutzt. Durch Vergleichen dieser Skala mit der Skala unter dem Mikroskop konnte so wie in der vorherigen Aufgabe die Vergrößerung bestimmt werden, hier allerdings nur die Vergrößerung des Objektivs.

Hier konnten wir die Okularskala auf  $\delta a' = 0,05$  mm genau ablesen. Damit erhalten wir hier für den systematischen Fehler  $\delta V$  wieder Gleichung (3.1) auf der vorherigen Seite.

Damit erhalten wir:

	Objektiv:	1	2	3
Strecke $a'$ auf der Skala im Okular betrachtet [mm]:		7,0	10,0	9,2
Strecke $b$ durch Mikroskop betrachtet [mm]:		1,71	1,09	0,21
Gemessene Vergrößerung $V \pm \delta V$ :		$4,09 \pm 0,042$	$9,17 \pm 0,09$	$43,8 \pm 1,3$
Theoretische Vergrößerung:		4	10	40

Unsere gemessenen Werte liegen also sehr nahe an der angegebenen Vergrößerung. Auch zeigt sich, dass sich die Vertrauensintervalle mit denen der letzten Aufgabe überschneiden. Daher stehen unsere Messungen in Einklang mit denen der vorherigen Aufgabe. Das zweite Objektiv, mit 10-facher Vergrößerung, scheint tatsächlich eine niedrigere Vergrößerung zu haben als angegeben. Andere Abweichungen der Vergrößerungen von den angegebenen Werten können von Randbedingungen wie Temperatur, Luftdruck, Luftfeuchtigkeit und anderen Faktoren abhängen.

## 5 Bestimmung von Spaltbreiten und des Haardurchmessers

Mittels des Okulars mit integrierter Skala haben wir die Spaltbreiten und -abstände der Blende mit Mehrfachspalten vermessen. Dabei haben wir für die Spaltbreite im Mittel 2,25 mm abgelesen, was bei der verwendeten 40-fachen Objektivvergrößerung einer tatsächlichen Spaltbreite von 0,05625 mm entspricht. für den Abstand dieser Spalte lasen wir genau das Doppelte, nämlich 4,5 mm ab, was einem tatsächlichen Spaltabstand von 0,1125 mm entspricht.

Damit liegen unsere Werte beide etwas über den angegebenen Werten von 0,05 mm und 0,1 mm. Dies könnte daran liegen, dass die tatsächliche Objektivvergrößerung etwas größer als 40-fach ist, wie wir auch in Aufgabe 4 festgestellt haben. Denn mit einer Vergrößerung von 43,8 erhalten wir eine Spaltbreite von 0,051 mm sowie einen Spaltabstand von 0,103 mm, was eher den Angaben entspricht. Daher gehen wir davon aus, dass die Vergrößerung des Objektivs tatsächlich nicht exakt ist. Allerdings ist natürlich auch ein fehlerhaftes Messen unsererseits nicht auszuschließen.

Die Dicke eines Haares von Jingfan Ye haben wir zu 3,1 mm im Okular abgelesen, was bei der angenommenen Vergrößerung von 43,8 einer tatsächlichen Dicke von 70,8  $\mu\text{m}$  entspricht. Dies deckt sich mit einer Messung aus dem Versuch „Laser-Optik, Teil A“ vom 3. Mai 2010, bei dem wir mittels Beugung an einem Haar desselben Probanden die Dicke dieses Haares zu 66  $\mu\text{m}$  bestimmten.

Bei diesen Messungen musste immer darauf geachtet werden, das zu messende Objekt ausreichend scharf zu stellen. Denn sonst werden die Kanten unscharf und man konnte die Breite nicht mehr eindeutig abmessen.

## 6 Bestimmung der numerischen Apertur A

Wir entfernten das Okular des Mikroskops und schalteten die Beleuchtung des Mikroskops aus. Den Objektstisch stellten wir auf die unterste Position ein. Mit einer Taschenlampe strahlten wir in das Okularloch rein, sodass auf dem Objektstisch ein kreisrunder Ring, dessen Radius  $r_1$  vom jeweiligen Objektiv abhängt, zu sehen war. Anschließend legten wir ein Plättchen mit der Dicke von  $d = 3$  mm auf den Objektstisch, der Radius des Kreisringes verkleinerte sich dann auf  $r_2$ . Wir maßen diese Radien, indem wir Millimeterpapier auf die beleuchtete Stelle legten, den Durchmesser der beleuchteten Stelle  $d_1$  bzw.  $d_2$  bestimmten und diese dann durch 2 teilten.

Mit folgender Formel (Gleichung (6.4) aus der Vorbereitung) konnten wir dann auf die numerische Apertur schließen:

$$NA = \sin \alpha = \sin \arctan \left( \frac{d}{r_1 - r_2} \right)$$

Wir erhielten folgende Ergebnisse:

	$d_1$ in mm	$r_1$ in mm	$d_2$ in mm	$r_2$ in mm	NA
Objektiv mit Vergrößerung 10 : 1:	5	2,5	3,5	1,75	0,97
Objektiv mit Vergrößerung 40 : 1:	15	7,5	6	3	0,66

Unser Messwert für die numerische Apertur des zweiten Objektivs mit 40-facher Vergrößerung stimmt sehr gut mit der Angabe des Herstellers von  $NA = 0,65$  überein. Beim Objektiv mit der Vergrößerung 10 : 1 stimmt unser Wert überhaupt nicht. Der Hersteller gab eine numerische Apertur von 0,3 an. Diese große Abweichung kommt wahrscheinlich daher, dass der beleuchtete Kreisring auf dem Millimeterpapier bei diesem Objektiv einen äußeren Ring hatte, den wir uns nicht erklären konnten. Wir nahmen als Durchmesser immer den Durchmesser des voll beleuchteten Kreisrings.

Für den noch aufzulösenden Abstand  $g_{\min}$  gilt, wie in der Vorbereitung gezeigt:

$$g_{\min} = \frac{\lambda}{2 \cdot NA}$$

Mit dem Objektiv mit 40-facher Vergrößerung kann man also, mit der von uns gemessenen numerischen Apertur, Details auflösen, die mindestens 303 nm entfernt sind. Dabei nahmen wir für  $\lambda$  das kurzwelligste sichtbare Licht mit der Wellenlänge 400 nm an.

Das Objektiv mit der Vergrößerung 10 : 1 kann mit den obigen Annahmen sogar Details mit dem Abstand 206 nm auflösen, wenn man unserem Messergebnis für die numerische Apertur Glauben schenkt. Würde man für die numerische Apertur die Herstellerangabe von 0,3 nehmen, so kämen wir auf 667 nm als kleinsten Abstand zweier aufzulösender Details.

## 7 Das Leben im Wassertropfen

Mit dem Mikroskop betrachteten wir einige Präparate aus der Unterrichtsserie „Das Leben im Wassertropfen“ und beobachteten die Veränderungen des Bildes bei Variation der Mikroskopeinstellungen.

Verkleinert man die Öffnung der Blende, so wird das Bild allgemein schärfer, während man bei großer Blendenöffnung nur auf eine gewisse horizontale Ebene des Präparats scharf stellen konnte. Dafür steigt die Intensität der Farbe, je weiter man die Blende öffnet. Allgemein wird das Bild auch dunkler, wenn man die Blendenöffnung verkleinert, da ja auch weniger Licht in das Präparat gelangt.

Mit der Helligkeitseinstellung der Lampe kann man lediglich einstellen, wie hell man das Präparat durch das Mikroskop sehen will.

Die Höheneinstellung der Kondensorlinsen hat keinen wahrnehmbaren Effekt auf die Präparate. Lediglich der Hintergrund verändert sich. Bei einer bestimmten Einstellung werden die Unebenheiten der Mattscheibe, unter der sich die Lampe befindet, auf dem Bild sehr deutlich abgebildet. Entfernt man sich von dieser Einstellung, werden diese immer unschärfer, bis sie nicht mehr zu erkennen sind. Die Kondensorlinsen dienen auch nur zur Bündelung des Lichts der Lampe und haben selbst wenig mit der Abbildung des Präparats zu tun.

## 8 Justieren des Gitterspektrometers

Wir haben das Gitterspektrometer nach Vorschrift justiert, sodass es für die nachfolgenden Versuche verwendet werden konnte.

## 9 Bestimmung der Gitterkonstanten

Mit dem Gitterspektrometer haben wir die Winkel  $\alpha$  der Beugungsmaxima  $m$ -ter Ordnung der Natrium-D-Linie am Gitter bestimmt. Dabei haben wir das Gerät auf die rechte Seite des Lichtspalts geeicht und immer die rechte Kante der Maxima bestimmt. Daher haben wir für positive Beugungsordnungen die größere Wellenlänge (589,5924 nm)<sup>1</sup> der äußeren Linie und für negative Beugungsordnungen die kleinere Wellenlänge (588,9950 nm)<sup>1</sup> der inneren Linie der Doppellinie zur Auswertung herangezogen. Darüber hinaus erkannten wir eine Tendenz, dass die Winkel für Maxima positiver Ordnungen fast immer etwas größer waren als die der Maxima negativer Ordnungen. Daraus schließen wir auf eine unzureichende Eichung zu Beginn des Versuchs, was wir durch eine Korrektur jedes Winkels um  $-0,03^\circ$  ausgleichen. Mit

$$g = \frac{m\lambda}{\sin \alpha}$$

erhalten wir somit:

Winkel $\alpha$ des Maximums:	3,37°	6,75°	10,17°	13,64°	17,15°	20,55°
Beugungsordnung $m$ :	1	2	3	4	5	6
Gitterkonstante $g$ [ $\mu\text{m}$ ]:	10,030	10,027	10,017	10,003	9,995	10,076
Winkel $\alpha$ des Maximums:	-3,36°	-6,76°	-10,16°	-13,61°	-17,08°	-20,65°
Beugungsordnung $m$ :	-1	-2	-3	-4	-5	-6
Gitterkonstante $g$ [ $\mu\text{m}$ ]:	10,050	10,013	10,024	10,020	10,037	10,033

Allerdings konnten wir mit dem Nonius den Winkel  $\alpha$  nur auf eine halbe Bogenminute genau angeben. Wenn wir den Fehler in der Wellenlänge vernachlässigen, was aufgrund deren Größenordnung praktisch keinerlei Auswirkungen hat, kommen wir auf einen systematischen Fehler von

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right| \delta \alpha = \left| -m\lambda \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right| \delta \alpha = 0,00998 \mu\text{m}.$$

<sup>1</sup>Quelle: NIST Atomic Spectra Database, <http://physics.nist.gov/asd3>

Somit erhalten wir als Endergebnis für die Gitterkonstante:

$$g = (10,027 \pm 0,022 \pm 0,010) \mu\text{m}$$

Dies entspricht sehr gut dem angegebenen ungefähren Wert von  $10 \mu\text{m}$ .

Zwar sollten nach der Vorbereitung jedes fünfte Maximum verschwinden, allerdings konnte dies im Versuch nicht beobachtet werden.

## 10 Bestimmung des Wellenlängenabstandes der Na-Doppellinie

Um den Wellenlängenabstand der Doppellinie zu bestimmen, haben wir bei verschiedenen Maxima höherer Ordnung  $n$  jeweils wieder die Lagen der rechten Kanten der einzelnen Linien bestimmt. Mit diesen beiden Winkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  lässt sich dann der Abstand der Wellenlängen

$$\Delta\lambda = \frac{g}{n} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

bestimmen. Wir erhalten:

Winkel $\alpha_1$ :	20,753°	24,420°	-13,613°	-24,263°
Winkel $\alpha_2$ :	20,720°	24,387°	-13,647°	-24,279°
Beugungsordnung $n$ :	6	7	-4	-7
Wellenlängenabstand $\Delta\lambda$ [nm]:	0,909	0,759	1,417	0,760

Hier konnten wir auch wieder nur bis auf eine halbe Bogensekunde genau ablesen. Den systematischen Fehler haben wir allein mit diesem Winkel-Ablesefehler grob nach unten abgeschätzt:

$$\delta\Delta\lambda = \left( \left| \frac{g}{n} \cos \alpha_1 \right| + \left| \frac{g}{n} \cos \alpha_2 \right| \right) \delta\alpha = 0,481$$

Damit erhalten wir für den Abstand der beiden Natrium-D-Linien:

$$\Delta\lambda = (0,96 \pm 0,32 \pm 0,48) \text{ nm}$$

Es zeigt sich, dass dieser Abstand aufgrund seiner geringen Größe nur mit beschränkter Genauigkeit gemessen werden konnte. Dennoch liegt der zu erwartende Wert von  $0,597 \text{ nm}$  in unserem Vertrauensintervall.