

Praktikum Klassische Physik II

Versuchsvorbereitung:

Auflösungsvermögen

(P2-10)

Christian Buntin, Jingfan Ye

Gruppe Mo-11

Karlsruhe, 28. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Auflösungsvermögen des Auges	2
1.1	Experimentelle Bestimmung	2
1.2	Theoretische Abschätzung	2
2	Vergrößerung einer Lupe	3
3	Gesamtvergrößerung eines Mikroskops	3
4	Vergrößerung der einzelne Objektive	3
5	Bestimmung von Spaltbreiten und des Haardurchmessers	3
6	Bestimmung der Numerischen Apertur A	3
7	Das Leben im Wassertropfen	5
8	Justieren des Gitterspektrometers	5
9	Bestimmung der Gitterkonstanten	6
10	Bestimmung des Wellenlängenabstandes der Na-Doppellinie	6

1 Auflösungsvermögen des Auges

1.1 Experimentelle Bestimmung

Man betrachtet ein schwarzweißes Balkenmuster aus der Entfernung s . Zuerst soll herausgefunden werden, wie viel der Mindestsehwinkel α der Augen beträgt, welcher sich aus folgender Abhängigkeit ergibt:

$$\tan \alpha = \frac{a}{s} \quad (1.1)$$

a bezeichnet den Abstand der Schwarz-Weiß-Balken, die beim Abstand s zum Auge gerade noch voneinander zu unterscheiden sind.

Die *Mindestseparation* entspricht dem kleinsten, noch vom nackten Auge aufzulösenden Abstand aus der Entfernung $s_0 = 25$ cm, welches die normierte *deutliche Sehweite* bei vielen optischen Geräten ist. Dabei ist die deutliche Sehweite gerade der kleinstmögliche Abstand des Auges zum betrachteten Gegenstand, bei dem man den Gegenstand noch ohne Mühe scharf sehen kann. Um diese Mindestseparation zu bestimmen, wird Gleichung (1.1) mit bekanntem Mindestsehwinkel α verwendet:

$$a_{\min} = s_0 \tan \alpha$$

1.2 Theoretische Abschätzung

Bei dieser Abschätzung betrachtet man die Iris als Blende mit Durchmesser $d = 3$ mm, an der Licht der Wellenlänge $\lambda = 550$ nm, für welches das menschliche Auge am empfindlichsten ist, gebeugt wird. Für die Intensitätsverteilung nach der Fraunhofernäherung gilt, wie aus den Versuchen „Mikrowellenoptik“ und „Laser A“ bekannt:

$$\frac{I}{I_0}(\sin \alpha) = \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \alpha}{\lambda}\right)^2}}_{\text{Einzelspaltterm}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{N \cdot \pi \cdot g \cdot \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot g \cdot \sin \alpha}{\lambda}\right)}}_{\text{Verhalten weiterer Spalte}} \quad (1.2)$$

α bezeichnet den Beugungswinkel, d die Spaltbreite, g die Gitterkonstante und N die Anzahl der Spalte. Für den Einzelspalt kürzt sich der zweite Bruch zu 1, es folgt:

$$\frac{I}{I_0}(\sin \alpha) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \alpha}{\lambda}\right)^2}$$

Das erste Maximum ist offensichtlich bei $\alpha = 0$. Für die Minima des Einzelspalts der Ordnung m gilt:

$$\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \alpha}{\lambda} = m \cdot \pi \Leftrightarrow \sin \alpha = m \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Für das erste Minimum folgt daher ($m = 1$):

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\lambda}{d} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 0,01^\circ \quad (1.3)$$

2 Vergrößerung einer Lupe

Dieser Versuch handelt davon, die Vergrößerung V einer Lupe zu bestimmen. Dazu werden eine oder zwei Skalen mit einem Auge ohne Bewaffnung und mit dem anderen durch eine Lupe betrachtet, sodass man die Vergrößerung abschätzen kann. Diese wird mittels einer weiteren Methode, bei welcher die Bestimmung der Brennweite f in einem Handexperiment und mit der Formel $V = \frac{s_0}{f}$ geschieht, wobei s_0 die deutliche Sehweite repräsentiert, überprüft.

3 Gesamtvergrößerung eines Mikroskops

Hier wird die Gesamtvergrößerung eines Mikroskops sukzessive für 3 Objektive mit Hilfe einer geeichten Skala bestimmt. Mit einem Auge schaut man durch das Mikroskop und mit dem anderen direkt auf die Skala (Millimeterpapier), und schätzt die Vergrößerung, wie bei der vorherigen Aufgabe durch die Größenvergleiche ab. Theoretisch ist die Gesamtvergrößerung

$$V = V_{\text{Okul}} \cdot V_{\text{Obj}} = \frac{t \cdot s_0}{f_{\text{Obj}} \cdot f_{\text{Okul}}}$$

zu erwarten, wenn man V_{Okular} und f_{Okul} als Vergrößerung bzw. Brennweite des Okulars sowie V_{Objektiv} und f_{Obj} als Vergrößerung bzw. Brennweite des Objektivs nimmt. Darüber hinaus bezeichnet t die Tubuslänge des Mikroskops.

4 Vergrößerung der einzelnen Objektive

In diesem Versuchsabschnitt soll nicht nur die Gesamtvergrößerung des Mikroskops, sondern die Vergrößerung V_{Obj} jedes einzelnen Objektivs untersucht werden. Dazu wird eine Skala auf dem Mikroskoptisch mit einer Skala, welche im Okular eingebaut ist, verglichen. Da sich letztere Skala im Okular befindet, wird sie nicht vergrößert. Man kann die Vergrößerung dann wie in den letzten Aufgaben abschätzen.

5 Bestimmung von Spaltbreiten und des Haardurchmessers

Mit den in den letzten Versuchen erhaltenen Vergrößerungen soll nun mit dem Mikroskop die Spaltbreite der „Blende mit Mehrfachspalten“ sowie der Durchmesser eines Haares untersucht werden.

6 Bestimmung der Numerischen Apertur A

Die numerische Apertur NA eines Objektivs gibt seine Fähigkeit an, Licht zu fokussieren. Sie ist definiert als:

$$NA = n \cdot \sin \alpha \tag{6.1}$$

n stellt den Brechungsindex des Mediums dar, durch die das Licht propagiert und α ist der halbe Öffnungswinkel der Lichtstrahlen (Lichtkegel) eines Objekts, die zum Objektiv ausgesandt werden.

Nach dem *Abbéschen Kriterium* für das Auflösungsvermögen betrachtet man das aufzulösende Objekt als ein Beugungsgitter, dessen erstes Maximum noch im Objektiv landen muss, damit die Information

über die Gitterabstände g nicht verloren geht. Dieser Gitterabstand entspricht dann bei allgemeinen Objekten die Minimalbreite der aufzulösenden Details. Für die Maxima eines Gitters gilt nach der Fraunhofernäherung dasselbe wie für die Maxima eines Doppelspalts:

$$\frac{\pi g \sin \alpha}{\lambda} = m \cdot \pi \quad m \in \mathbb{N}$$

α ist der Beugungswinkel des Gitters, entspricht also genau dem halben Öffnungswinkel des Lichtkegels, welches das Gitter zum Objektiv sendet. Für das erste Maximum gilt also ($m = 1$):

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{g} \Leftrightarrow n \cdot \sin \alpha = \text{NA} = \frac{\lambda_0}{g} \Leftrightarrow g = \frac{\lambda_0}{\text{NA}}$$

$\lambda_0 = n \cdot \lambda$ gibt die Vakuumwellenlänge des Lichts an. Hier wird jedoch ein Punkt des Objekts betrachtet, welches sich auf der optischen Achse des Objektivs befindet. Es wird zur Berechnung das nullte Hauptmaximum, welches sich ebenfalls auf der optischen Achse befindet, und das erste Hauptmaximum genommen, welches sich am Rand des Objektivs befindet. Eine Hälfte des Objektivs wird also nicht berücksichtigt. Man könnte das ganze Objektiv ausnutzen, wenn man das nullte Hauptmaximum auf das eine und das erste Hauptmaximum auf das andere Ende des Objektivs setzen würde, damit würde sich der Winkel α verdoppeln. Mit der Näherung $\sin \alpha \approx \alpha$, woraus $n \cdot \sin(2\alpha) \approx 2n \cdot \sin \alpha = 2\text{NA}$ folgt, ergibt sich somit:

$$g = \frac{\lambda_0}{2 \cdot \text{NA}} \quad (6.2)$$

Man sieht an dieser Gleichung, dass die Numerische Apertur unmittelbar mit der Wellenlänge zusammenhängt. g gibt den kleinsten aufzulösenden Abstand an. Um also höhere Auflösungen zu erreichen, muss man entweder die Wellenlänge verkleinern (\rightarrow Röntgenmikroskopie), oder die numerische Apertur erhöhen.

Nach dem *Helmholtz-Kriterium* betrachtet man das Objektiv als Beugungsgitter. Die einzelnen Punkte des abzubildenden Objekts erzeugen durch Beugung am Objektiv Kreise in der Abbildung. Diese Kreise müssen nach dem Helmholtz-Kriterium so klein bleiben, dass sie sich nicht gegenseitig überlappen. Die Rechnung nach diesem Prinzip ist wesentlich schwieriger als nach dem Abbéschen Kriterium, man bekommt aber dieselbe Auflösungsbedingung.

Um die Numerische Apertur NA der Objektive zu bestimmen, wird Gleichung (6.1) auf der vorherigen Seite benutzt. Da sich die Objektive nur als Trockenobjektive eignen, ist das lichtdurchflutete Medium hierbei Luft. Um den Winkel α zu bestimmen, wird der Objektivtisch auf die tiefste Position eingestellt und das Mikroskop von oben ohne Okular beleuchtet. Es sollte ein Lichtkegel auf dem Objektivtisch zu sehen sein. Der Radius dieses Kegels r_1 wird mit Millimeterpapier aufgetragen. Anschließend wird eine Zwischenablage mit der Dicke $d = 3$ mm auf den Objektivtisch gelegt und nochmals mit Millimeterpapier der Radius des Lichtkegels r_2 aufgetragen. Nach den Strahlensätzen gilt:

$$\frac{x+d}{r_1} = \frac{x}{r_2} \Leftrightarrow x = \frac{d}{\frac{r_1}{r_2} - 1}$$

x ist dabei der Abstand des Objektivtisches mit Zwischenablage zum Objektiv. Man kann mit dieser Information dann ganz einfach den Winkel α ausrechnen:

$$\tan \alpha = \frac{x}{r_2} \Leftrightarrow \alpha = \arctan \frac{x}{r_2} = \arctan \left(\frac{d}{r_1 - r_2} \right) \quad (6.3)$$

Für die Numerische Apertur gilt also:

$$\text{NA} = \underbrace{n}_{=1} \cdot \sin \alpha = \sin \arctan \left(\frac{d}{r_1 - r_2} \right) \approx \frac{d}{r_1 - r_2} \quad (6.4)$$

Das Okular besitzt eine 10-fache Vergrößerung. Die Herstellerangaben zu den Objektiven und die daraus resultierenden Vergrößerungen V und Auflösungsvermögen (g_{\min} : kleinstes aufzulösendes Detail) lauten wie folgt:

Vergrößerung des Objektivs	Gesamtvergrößerung V	NA	g_{\min} in nm
4:1	40	0,15	1333
10:1	100	0,3	667
40:1	400	0,65	308

Zur Berechnung von g_{\min} wurde Gleichung (6.2) auf der vorherigen Seite verwendet und als Wellenlänge das kurzwelligste sichtbare Licht mit $\lambda = 400$ nm genommen.

Die *förderliche Vergrößerung* ist die „sinnvolle“ Vergrößerung eines Lichtmikroskops, bei der das Auge die Vergrößerung noch wahrnimmt. Sie liegt nach Abbé bei etwa dem 500 bis 1000-fachen der numerischen Apertur. Ist die Vergrößerung des Mikroskops größer, so stellt das Mikroskop zwar objektiv das Objekt noch größer dar, das Auge kann aber die Details nicht mehr wahrnehmen. Man spricht dann von leerer Vergrößerung. (Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Lichtmikroskop>)

Wie man an obiger Tabelle sehen kann, liegen die Vergrößerungen bei den Objektiven des Mikroskops in diesem Versuch deutlich unter der förderlichen Vergrößerung.

7 Das Leben im Wassertropfen

In diesem Versuchsabschnitt werden Präparate aus der Unterrichtsserie „Das Leben im Wassertropfen“ mit dem Mikroskop beobachtet. Dabei werden verschiedene Einstellungen des Mikroskops variiert und deren Wirkung auf das Bild beschrieben. Die zu variierenden Einstellungen sind:

- Helligkeit der Lampe
- Blende im Kondensator (Aperturblende)
- Höheneinstellung des Kondensators
- Filterhalter des Kondensators

8 Justieren des Gitterspektrometers

Ein Gitterspektrometer ist ein Gerät, welches durch Interferenz die Gitterkonstante eines Gitters bestimmen kann. Licht (in diesem Versuch das einer Natriumdampfampe) wird durch einen Spalt gestrahlt, welches dieselbe Ausrichtung wie das zu untersuchende Beugungsgitter hat. Dann kommt das durch den Spalt scheinende Licht am Gitter an und wird von ihm gebeugt. Das entstehende Beugungsmuster kann nun mit einem Fernrohr betrachtet und der Beugungswinkel mit einem Nonius abgelesen werden.

In dieser Aufgabe soll lediglich das Gitterspektrometer nach den Schritten in der Versuchsanweisung justiert werden.

9 Bestimmung der Gitterkonstanten

Nachdem das Spektrometer im vorherigen Abschnitt justiert wurde, kann man nun die Maxima des Gitters, welches mit Licht der mittleren Wellenlänge $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ aus einer Natriumdampflampe bestrahlt wurde, betrachten und auswerten. Für die Hauptmaxima gilt, wie in Aufgabenteil 1.2 bereits erwähnt:

$$\frac{\pi g \sin \alpha}{\lambda} = m \cdot \pi \quad m \in \mathbb{N}$$

$$g = m \cdot \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (9.1)$$

g steht für die Gitterkonstante und m für die Ordnung des Hauptmaximums. Mit dem Nonius kann nun der Beugungswinkel α der zugehörigen Beugungsordnungen bestimmt und somit auf die Gitterkonstante geschlossen werden. Weiter soll noch das Auflösungsvermögen des ausgeleuchteten Gitters bestimmt werden.

Man muss beachten, dass einzelne Einzelspaltminima mit den Hauptmaxima des Gesamtgitters zusammenfallen könnten. Diese sind dann nicht auf dem Schirm zu sehen. Aus Gleichung (1.2) auf Seite 2 ist abzulesen, dass für die Einzelspaltminima gilt:

$$\frac{\pi \cdot b \cdot \sin \alpha}{\lambda} = n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{N}$$

b gibt die Spaltbreite an. Daraus ergibt sich:

$$\sin \alpha = n \cdot \frac{\lambda}{b} \quad (9.2)$$

In der Versuchsanweisung ist eine Gitterperiode von $\frac{b}{g} = 0,4 = \frac{2}{5}$ angegeben. Dividiert man nun Gleichung (9.1) durch Gleichung (9.2), folgt:

$$1 = \frac{m}{n} \cdot \underbrace{\frac{b}{g}}_{=\frac{2}{5}} \Leftrightarrow 5n = 2m$$

Jedes 5. Gittermaximum trifft also auf ein Einzelspaltminimum.

10 Bestimmung des Wellenlängenabstandes der Na-Doppellinie

Natrium strahlt zwei energetisch eng benachbarte Doppellinien aus, die nur im Mittel die Wellenlänge $\bar{\lambda} = 589,3 \text{ nm}$ besitzen. In diesem Versuchsteil soll nun der Wellenlängenunterschied bestimmt werden. In den vorherigen Aufgaben wurde die Gitterkonstante g bereits bestimmt, sodass wir sie als bekannt voraussetzen können. Für die Maxima des Gitters gilt bekanntlich:

$$\sin \alpha = n \cdot \frac{\lambda}{g} \quad n \in \mathbb{N}$$

Auf dem Beugungsbild sollte man aufgrund der zwei minimal verschiedenen Wellenlängen zwei eng benachbarte Maxima für jede Ordnung erkennen. Zuerst fixiert man mit dem Fernrohr ein Maximum an und misst dann die Winkeldifferenz $\Delta\alpha$ zum anderen Maximum derselben Ordnung. Es gilt:

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) = n \cdot \frac{\lambda + \Delta\lambda}{g} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{g}{n} \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha) - \lambda$$

$$\Delta\lambda = \frac{g}{n} (\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin \alpha)$$