

Versuchsauswertung:

Gammaspektroskopie und Statistik

(P2-72,73,83)

Christian Buntin, Jingfan Ye

Gruppe Mo-11

Karlsruhe, 21. Juni 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Impulshöhenspektren	2
1.1	Messung im Einkanalbetrieb	2
1.2	Messung im 1024-Kanalbetrieb	2
1.3	Deutung	3
2	Aktivität von ^{137}Cs	5
3	Röntgenemission	5
3.1	Kalibrierung	5
3.2	Bestimmung eines unbekanntes Elements	6
4	Statistische Verteilungen	7
4.1	Stichprobe A mit Mittelwert ≈ 3	7
4.1.1	χ^2 -Test	8
4.2	Stichprobe B aus allen Messwerten	8
4.2.1	χ^2 -Test	9
4.3	Fazit	10

1 Impulshöhenspektren

1.1 Messung im Einkanalbetrieb

Wir haben mit 50 Kanälen mit 10 s Messdauer pro Kanal ein Impulshöhendiagramm von ^{137}Cs im Einkanalbetrieb aufgenommen (Abbildung 1).

Um dieses Spektrum so zu erhalten, haben wir die Spannung am Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) so weit erhöht, bis der Photopeak möglichst weit rechts zu sehen war. Dies war bei einer Spannung von 847 V der Fall.

Auch haben wir, wie bei den folgenden Spektren auch immer, den Abstand zwischen Probe und Detektor so gewählt, dass die Zählrate zwischen 1000 Bq und 1500 Bq lag.

Zwar ist die Auflösung des Spektrums in Abbildung 1 nicht besonders groß, allerdings sind die signifikanten Stellen des ^{137}Cs -Spektrums dennoch deutlich erkennbar.

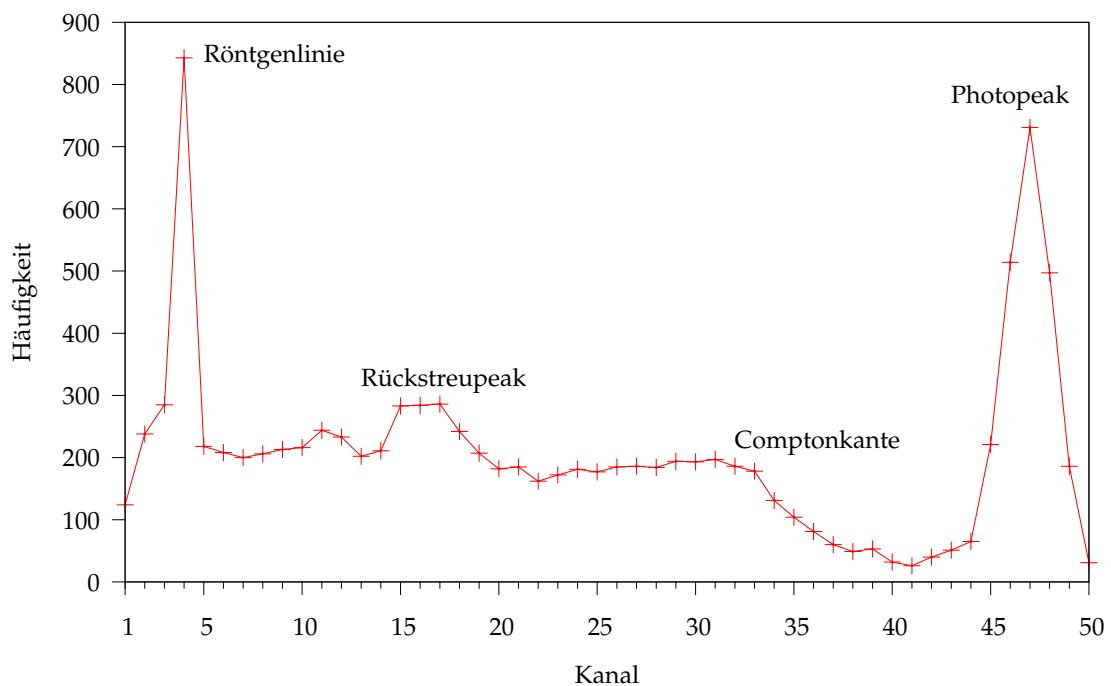


Abbildung 1: Impulshöhenspektrum von ^{137}Cs im Einkanalbetrieb.

1.2 Messung im 1024-Kanalbetrieb

Wir haben im 1024-Kanalbetrieb Spektren von ^{137}Cs , ^{22}Na und ^{60}Co sowie das Untergrundspektrum aufgenommen. Dabei wählten wir für alle Proben eine Messzeit von 5 min und stellten den Abstand der Probe zum Detektor so ein, dass die Zählraten immer bei etwa 1000 Bq lagen.

Die Spannung am SEV wurde so hoch gewählt, dass der höchste Peak von ^{60}Co gerade noch gut zu sehen war. Dies war bei 786 V der Fall.

Die erhaltenen Spektren wurden mittels des Untergrundspektrums, auch wenn deren Einfluss sehr gering war, korrigiert und sind in Abbildung 2 auf der nächsten Seite dargestellt.

Eine größere, beschriftete Abbildung befindet sich am Ende dieser Versuchsauswertung.

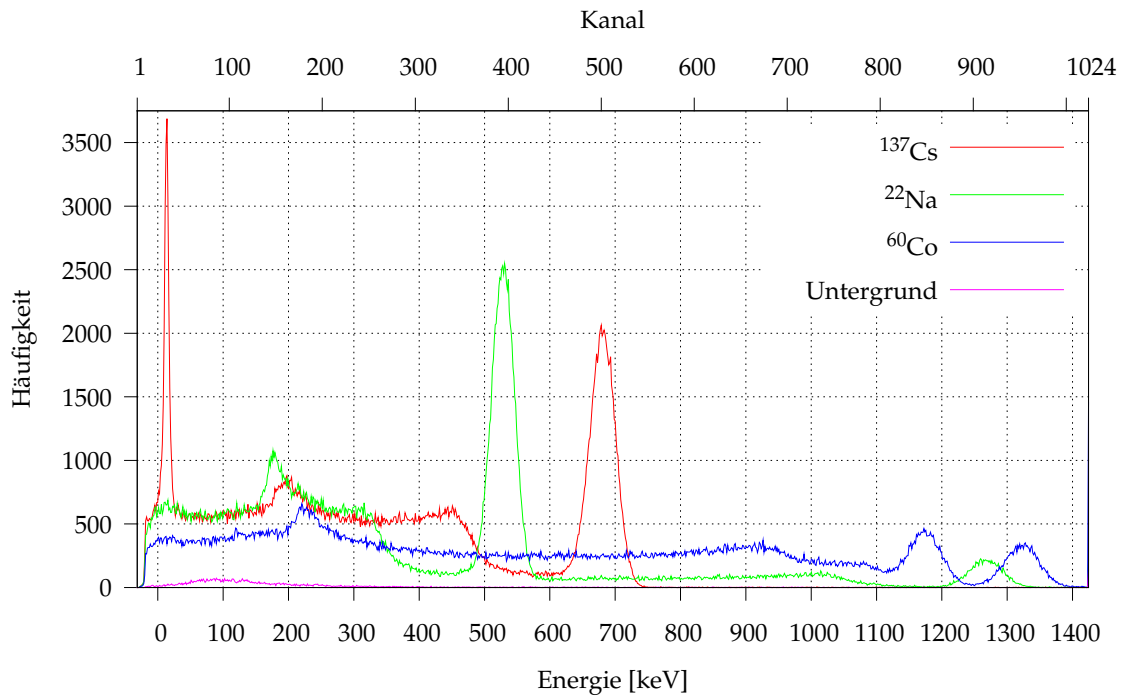


Abbildung 2: Impulshöhenspektren verschiedener Proben.

1.3 Deutung

Da uns eine Energieskalierung nur anhand des Photopeaks von ^{137}Cs zu ungenügend war, haben wir die Positionen der auftretenden Photopeaks und der Röntgenlinie bestimmt und die theoretische Energie dieser Peaks über deren gemessenen Kanal aufgetragen (Abbildung 3).

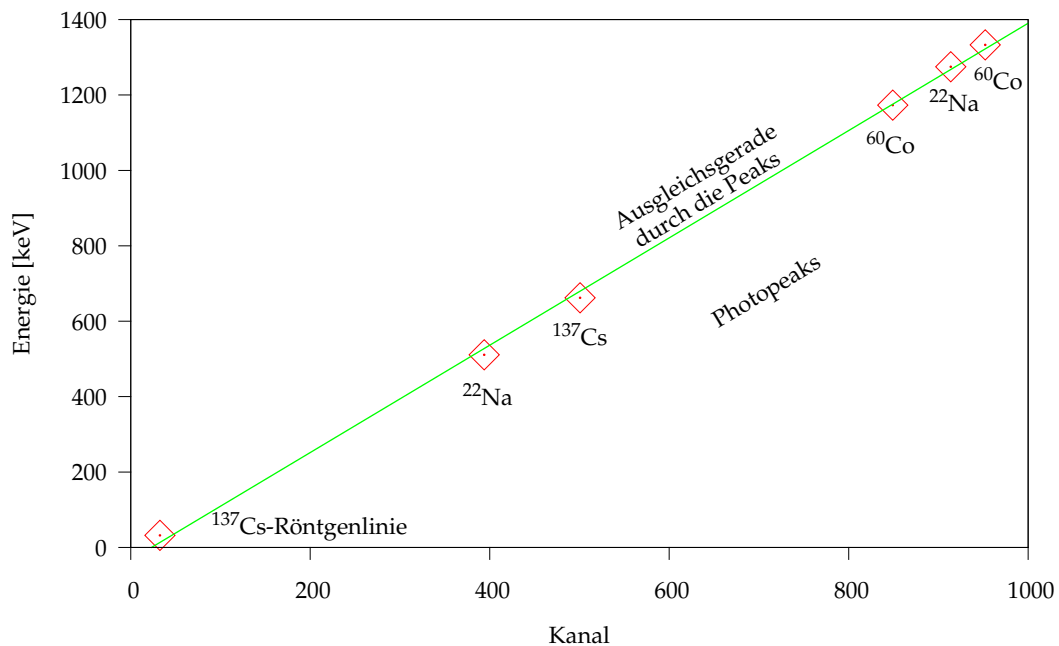


Abbildung 3: Eichung der Energieskala.

Da diese Peaks sehr deutlich zu bestimmen waren, erwarten wir durch die Regressionsgerade eine gute Zuordnung der Kanäle zu den Energien. Damit erhalten wir:

$$\text{Energie} = (1,42329 \cdot \text{Kanal} - 32,9614) \text{ keV}$$

Zwar erhalten wir damit am Anfang des Spektrums negative Energien, da allerdings die Werte der nachfolgenden Peaks gut passen, nehmen wir dies in Kauf. Zwar ist die Apparatur, wie man in Abbildung 3 auf der vorherigen Seite sieht, linear, aber entweder ist sie im unteren Bereich für unsere Anforderungen nicht linear genug oder die Peaks zur Energieeichung hatten andere Energien als wir angenommen haben.

Aus den aufgenommenen Spektren (Abbildung 2 auf der vorherigen Seite) haben wir die Werte der markanten Punkte bestimmt und mit den errechneten Energien verglichen:

Probe	markanter Punkt	Kanal	Energie [keV]		Abweichung
			gemessen	theoretisch	
^{137}Cs	Photopeak:	500,7	679,7	662	2,7%
	Comptonkante:	361	480,8	478	0,6%
	Rückstreupeak:	163,5	199,7	184	8,6%
	Röntgenlinie:	32,5	13,3	32	58,5%
^{22}Na	Photopeak:	393,8	527,5	511	3,2%
		913,7	1267,5	1275	0,6%
	Comptonkante:	268	348,5	341	2,2%
		767	1058,7	1062	0,3%
^{60}Co	Rückstreupeak:	149,9	180,4	170	6,1%
		173,1	213,4	213	0,02%
	Photopeak:	849,2	1175,7	1173	0,2%
		952,2	1322,3	1333	0,8%
^{60}Co	Comptonkante:	699	961,9	963	0,1%
		791	1092,9	1119	2,3%
	Rückstreupeak:	183,1	227,6	210	8,4%
			214	8,2%	

Für die Comptonkante haben wir die Stelle des Spektrums gewählt, an der die Steigung des Kurvenverlaufes am höchsten erschien.

Beim ^{137}Cs entspricht der Photopeak und die Comptonkante sehr gut der Theorie. Der Rückstreupeak lag bei einer etwas höheren Energie, allerdings hat dieser Peak wie auch alle anderen Rückstreupeaks eine etwas hohe Ausdehnung in der Breite. Die gemessene Röntgenlinie entspricht kaum der Theorie, aber hier vermuten wir, dass es an unserer Energieeichung liegt, die für kleine Energien nicht ideal ist.

Die markanten Stellen des ^{22}Na stimmen alle gut mit der Theorie überein. Der erste Rückstreupeak fiel wieder etwas breiter aus, allerdings konnte man bei diesem auch einen zweiten Rückstreupeak erkennen.

Die Werte für ^{60}Co stimmen ebenfalls gut mit der Theorie überein, wobei die beiden Rückstreupeaks wohl so nahe beieinander lagen, dass nur noch ein breiter Peak erkennbar gewesen ist.

Der Grund für die Breite aller Peaks liegt an der Arbeitsweise des NaI-Kristalls im Detektor. Denn dort wird die Energie eines Quants vereinfacht gesagt in viele kleine Energieportionen zerteilt, welche auch mit einer winzigen zeitlichen Verzögerung die Photokathode erreichen können. Dadurch

wird vom Detektor nicht ein scharfer Peak registriert, sondern es kommt zu einer gaußverteilungsähnlichen Verteilung am Peak.

Um die Auflösung des Detektors zu ermitteln, bestimmten wir die Halbwertsbreite des ^{137}Cs -Photopeaks zu 33 Kanälen. Dies entspricht einer Energiedifferenz von $\Delta E = 47,0 \text{ keV}$. Damit folgt für die Anzahl n_e der Elektronen, die bei einem Impuls dieses Peaks von der Photokathode emittiert wurden:

$$n_e = \left(\frac{E}{\Delta E} \right)^2 = 209,4 \approx 209.$$

2 Aktivität von ^{137}Cs

Wir haben die Anzahl N der registrierten Ereignisse einer ^{137}Cs -Probe bei verschiedenen Entfernungen Probe–Detektor d innerhalb eines Zeitintervalls Δt von zwei Minuten gemessen. Mit Hilfe der Tabelle 4 aus der Vorbereitungshilfe bestimmten wir mittels d und der bekannten Energie der γ -Quanten von 662 keV den Anteil n der nachgewiesenen Quanten. Somit konnten wir die Aktivität aus unseren Messungen bestimmen:

Abstand d [mm]:	10	15	20	30	40	60
Anzahl N der Ereignisse:	146459	126014	114379	88141	71177	51276
Nachweiswahrscheinlichkeit n :	0,05	0,031	0,022	0,012	0,008	0,004
Zählrate $Z = \frac{N}{\Delta t}$ [Bq]:	1220	1050	953	735	593	427
Aktivität $A = \frac{Z}{n}$ [Bq]:	24410	33875	43325	61209	74143	106825

Damit erhalten wir für die Aktivität A unserer ^{137}Cs -Probe einen Mittelwert mit statistischem Fehler von

$$A = (57298 \pm 30257) \text{ Bq}.$$

Wie man sieht, beträgt der statistische Fehler 53% des Mittelwertes und ist damit sehr hoch. Dies könnte daran liegen, dass der Abstand von der Oberseite des Detektors bis zur Unterseite der Probenfassung gemessen wurde. Da uns nicht bekannt war, an welcher Stelle sich die Probe in der Fassung befand, ist der tatsächliche Abstand auf jeden Fall größer.

3 Röntgenemission

Wir haben verschiedene Materialien mit γ -Quanten aus einer ^{137}Cs -Probe beschossen und jeweils die resultierenden Spektren aufgenommen. In diesen zeigte sich bei niedrigen Energien eine Röntgenlinie, welche sich je nach Element bei einer anderen Energie befand.

3.1 Kalibrierung

Da die Energie E der Röntgenlinien nach dem Moseleyschen Gesetz proportional zum Quadrat der Kernladungszahl Z ist, haben wir mittels zweier bekannter Elemente mit bekannten Röntgenlinien die Ausgleichsgerade von E über Z^2 bestimmt.

Dazu verwendeten wir Tantal ($Z_{\text{Ta}} = 73$) mit einer Röntgenlinie bei $E_{\text{Ta}} = 57,1$ keV sowie die beim Zerfall des ^{137}Cs sowieso auftretende Röntgenlinie des Barium ($Z_{\text{Ba}} = 56$) bei $E_{\text{Ba}} = 32,1$ keV. Damit erhalten wir für die Steigung m der Ausgleichsgeraden:

$$m = \frac{E_{\text{Ba}} - E_{\text{Ta}}}{Z_{\text{Ba}}^2 - Z_{\text{Ta}}^2} = 0,0114 \text{ keV}$$

und für deren y-Achsenabschnitt c folgt:

$$c = E_{\text{Ba}} - m \cdot Z_{\text{Ba}}^2 = E_{\text{Ta}} - m \cdot Z_{\text{Ta}}^2 = -3,65 \text{ keV}$$

Somit lautet unsere Fassung des Moseleyschen Gesetzes:

$$E = Z^2 \cdot 0,0114 \text{ keV} - 3,65 \text{ keV} \quad (3.1)$$

3.2 Bestimmung eines unbekanntes Elements

Wir haben nun wie oben die Röntgenlinie zweier unbekannter Elemente E und C bestimmt. Durch Umformen der Geradengleichung (3.1) konnten wir dann die Kernladungszahl Z bestimmen:

$$Z = \sqrt{\frac{E - c}{m}}$$

Für Element E konnten wir eine Röntgenlinie bei $E = 22,5$ keV erkennen. Somit beträgt die Kernladungszahl $Z = 47,89$, was in etwa der Kernladungszahl $Z_{\text{Ag}} = 47$ von Silber entspricht. Somit handelt es sich bei Element E um Silber.

Für Element C konnten wir deutlich eine Röntgenlinie bei $E = 59,4$ keV erkennen. Die Kernladungszahl dieses Elements beträgt somit $Z = 74,37$, was sehr gut der Kernladungszahl $Z_{\text{W}} = 74$ von Wolfram entspricht. Somit handelt es sich bei Element C um Wolfram.

Unsere ermittelte Ausgleichsgerade haben wir zusammen mit den vier Elementen in Abbildung 4 dargestellt.

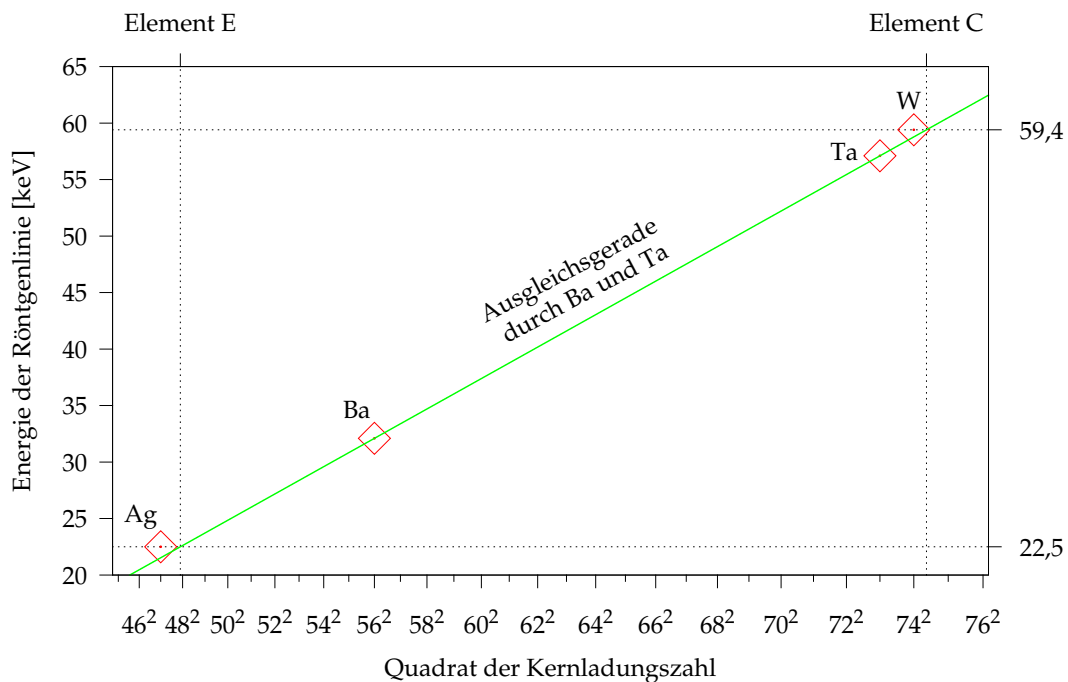


Abbildung 4: Bestimmung von unbekanntes Elementen über das Moseleysche Gesetz.

4 Statistische Verteilungen

Wir haben 150 Untergrundspektren mit jeweils 256 Kanälen mit einer Sekunde Messdauer pro Kanal aufgenommen und daraus unsere beiden Stichproben gebildet.

4.1 Stichprobe A mit Mittelwert ≈ 3

Für die Stichprobe A haben wir 138 zusammenhängende Kanäle aus den Spektren gewählt, deren Mittelwert 3,013 beträgt. Damit erhalten wir für die Häufigkeiten dieser Stichprobe:

Klasse:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit:	6	27	28	37	22	17	8	3	2	0

Wie bereits erwähnt erhalten wir für den Mittelwert dieser Stichprobe

$$x_m = 3,01\bar{3},$$

sowie für die Standardabweichung der Einzelmesswerte

$$s = 1,738$$

und für die Standardabweichung des Mittelwerts

$$s_{x_m} = 0,142.$$

Die Wurzel aus dem Mittelwert entspricht hier mit einer Abweichung von 0,11% sehr gut der Standardabweichung der Einzelmesswerte, wie es bei einer Poisson-Verteilung der Fall ist:

$$\sqrt{x_m} = 1,736 \approx 1,738 = s$$

Die Häufigkeiten dieser Stichprobe sind in Abbildung 5 zusammen mit der theoretischen Gauß- und Poisson-Verteilung dargestellt.

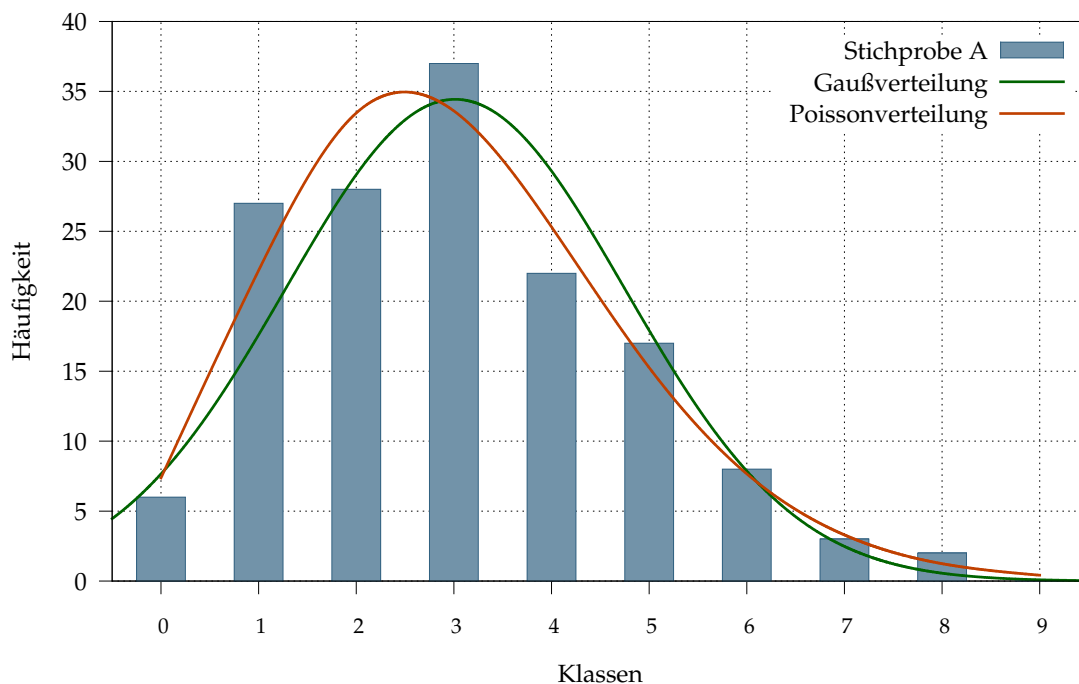


Abbildung 5: Häufigkeitsverteilung der Stichprobe A.

4.1.1 χ^2 -Test

Da für den χ^2 -Test die Häufigkeiten einer Klasse nicht unter 4 liegen sollen, haben wir die letzten drei Klassen zusammengelegt und erhalten:

Klasse:	0	1	2	3	4	5	6	7,8,9
Häufigkeit:	6	27	28	37	22	17	8	5
Poisson-Verteilung:	7,37	22,21	33,46	33,61	25,32	15,26	7,66	4,96
Gauss-Verteilung:	7,66	17,60	29,05	34,43	29,31	17,91	7,86	3,13

Damit erhalten wir für die Poissonverteilung einen Wert von

$$\chi^2 = 3,17.$$

Weil zur Berechnung dieser der Mittelwert der Messwerte als Parameter benötigt wurden, erhalten wir

$$F = n_{\text{Klassen}} - 1 - n_{\text{Parameter}} = 8 - 1 - 1 = 6$$

Freiheitsgrade. Da unser χ^2 bei jeder Irrtumswahrscheinlichkeit der Tabelle aus der Vorbereitungshilfe unterhalb des Tabellenwertes für 6 Freiheitsgrade liegt, liegt die Poisson-Verteilung unserer Stichprobe zugrunde.

Für die Gauß-Verteilung erhalten wir einen Wert von

$$\chi^2 = 8,60.$$

Da zur Berechnung dieser sowohl der Mittelwert der Messwerte als auch deren Standardabweichung als Parameter benötigt wurden, erhalten wir

$$F = n_{\text{Klassen}} - 1 - n_{\text{Parameter}} = 8 - 1 - 2 = 5$$

Freiheitsgrade. Da unser χ^2 auch bei jeder Irrtumswahrscheinlichkeit der Tabelle aus der Vorbereitungshilfe unterhalb des Tabellenwertes für 5 Freiheitsgrade liegt, liegt auch die Gauß-Verteilung unserer Stichprobe zugrunde. Allerdings ist der Wert für die Poisson-Verteilung deutlich geringer, weshalb wir annehmen, dass diese am ehesten unsere Stichprobe widerspiegelt.

4.2 Stichprobe B aus allen Messwerten

Für das zweite Spektrum B aus allen Kanälen erhalten wir die Häufigkeiten:

Klasse:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Häufigkeit:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Klasse:	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Häufigkeit:	2	1	3	6	5	8	8	6	15	11	14	12	8	12	6	13	2
Klasse:	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Häufigkeit:	4	6	1	0	3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0

Der Mittelwert dieser Stichprobe beträgt

$$x_m = 27,640,$$

die Standardabweichung der Einzelmesswerte

$$s = 5,332$$

und für die Standardabweichung des Mittelwerts erhalten wir

$$s_{xm} = 0,435.$$

Die Wurzel aus dem Mittelwert entspricht hier mit einer Abweichung von 1,42% auch in etwa, aber nicht so gut wie bei Stichprobe A, der Standardabweichung der Einzelmesswerte:

$$\sqrt{\bar{x}_m} = 5,257 \approx 5,332 = s$$

Die Häufigkeiten dieser Stichprobe sind in Abbildung 6 zusammen mit der theoretischen Gauß- und Poisson-Verteilung dargestellt.

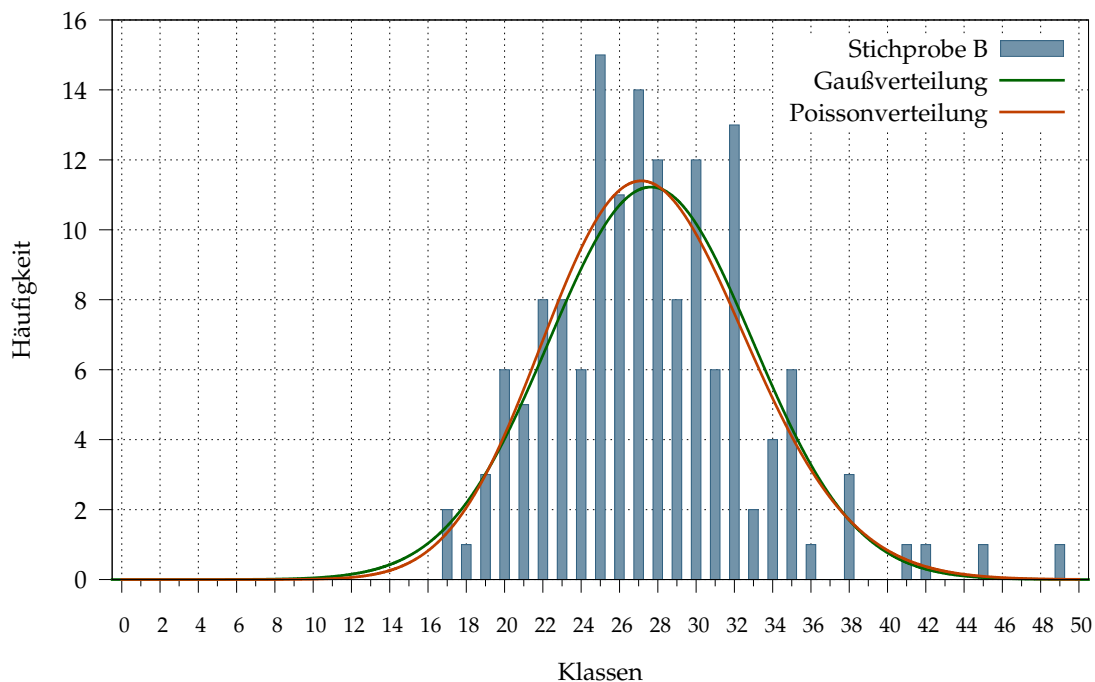


Abbildung 6: Häufigkeitsverteilung der Stichprobe B.

4.2.1 χ^2 -Test

Wir haben die ersten und letzten Klassen zusammengelegt, damit auch hier möglichst keine Klasse eine Häufigkeit unter 4 hat und erhalten:

Klasse:	0–19	20	21	22	23	24	25	26	27
Häufigkeit:	6	6	5	8	8	6	15	11	14
Poisson-Verteilung:	8,19	4,14	5,45	6,84	8,22	9,47	10,47	11,13	11,40
Gauss-Verteilung:	9,47	4,02	5,17	6,41	9,69	8,89	9,93	10,70	11,14
Klasse:	28	29	30	31	32	33	34	35	36–50
Häufigkeit:	12	8	12	6	13	2	4	6	8
Poisson-Verteilung:	11,25	10,72	9,88	8,81	7,61	6,37	5,18	4,09	10,78
Gauss-Verteilung:	11,20	10,86	10,18	9,20	8,03	6,77	5,51	4,33	10,49

Damit erhalten wir für die Poissonverteilung einen Wert von

$$\chi^2 = 16,28.$$

Weil zur Berechnung dieser der Mittelwert der Messwerte als Parameter benötigt wurden, erhalten wir

$$F = n_{\text{Klassen}} - 1 - n_{\text{Parameter}} = 18 - 1 - 1 = 16$$

Freiheitsgrade. Da unser χ^2 bei jeder Irrtumswahrscheinlichkeit der Tabelle aus der Vorbereitungshilfe unterhalb des Tabellenwertes für 6 Freiheitsgrade liegt, liegt auch hier die Poisson-Verteilung unserer Stichprobe zugrunde.

Für die Gauß-Verteilung erhalten wir einen Wert von

$$\chi^2 = 17,27.$$

Da zur Berechnung dieser sowohl der Mittelwert der Messwerte als auch deren Standardabweichung als Parameter benötigt wurden, erhalten wir

$$F = n_{\text{Klassen}} - 1 - n_{\text{Parameter}} = 18 - 1 - 2 = 15$$

Freiheitsgrade. Da unser χ^2 auch bei jeder Irrtumswahrscheinlichkeit der Tabelle aus der Vorbereitungshilfe unterhalb des Tabellenwertes für 5 Freiheitsgrade liegt, liegt auch die Gauß-Verteilung unserer Stichprobe zugrunde. Allerdings ist auch hier der Wert für die Poisson-Verteilung geringer, weshalb wir annehmen, dass diese am ehesten unserer Stichprobe entspricht.

4.3 Fazit

Somit können unsere Stichproben nach dem χ^2 -Test sowohl aus einer poisson- als auch aus einer gaußverteilten Grundgesamtheit stammen.. Da die χ^2 -Werte der Poisson-Verteilung allerdings immer geringer waren, passt diese besser als die Gauß-Verteilung zu unseren Messwerten.

Impulshöhenspektren verschiedener Proben

