

Versuchsvorbereitung:

Mikrowellenoptik

(P2-15)

Christian Buntin, Jingfan Ye

Gruppe Mo-11

Karlsruhe, 26. April 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Bestimmung der Wellenlänge	2
2	Beobachtung des emittierten Signals	2
3	Fresnel-Beugung am Einzelspalt	3
4	Beugung am Einzelspalt, Doppelspalt und am Gitter	3
5	Interferometer	7
6	Polarisation	7
7	Absorptionsvermögen	8
8	Optischer Tunneleffekt	8

Einleitung

In diesem Praktikumsversuch sollen die Phänomene der Wellenoptik näher untersucht werden. Da sichtbares Licht eine sehr kleine Wellenlänge hat und wellenoptische Effekte Bauteile in der Größenordnung der Wellenlänge benötigen, wird mit Mikrowellen experimentiert, die eine viel größere Wellenlänge besitzen.

1 Bestimmung der Wellenlänge

Zuerst soll die Wellenlänge der verwendeten Mikrowellen gemessen werden. Dazu wird hinter dem Mikrowellensender eine Metallplatte platziert, welche die ausgesendeten Mikrowellen reflektiert. Es bildet sich zwischen Sender und Metallplatte daher stehende Wellen. Da die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf einer Metalloberfläche immer 0 ist, muss auch ein Knoten auf der Metalloberfläche vorliegen. Der nächste Knoten liegt eine halbe Wellenlänge weiter entfernt in Richtung des Senders. In der Mitte beider Knoten befindet sich der Bauch der stehenden Welle.

Mithilfe eines Empfangsdipols kann nun die Intensität der Wellen an verschiedenen Orten gemessen werden. Die Intensität ist an den Bäuchen maximal, an den Knoten ist sie 0. Da der Abstand der Knoten (gleich dem Abstand der Bäuche) x genau der zweifachen Wellenlänge λ entspricht, lässt sich aus diesen Messdaten auf die Wellenlänge der Mikrowellen schließen:

$$\lambda = 2x \tag{1.1}$$

Da mit dem Messgerät die Nullpunkte (Knoten) besser zu bestimmen sind, ist es sinnvoll, diese für die Abstandsmessungen zu benutzen.

2 Beobachtung des emittierten Signals

Mithilfe des Hornempfängers und CASSY soll nun die Form des Mikrowellensignals beobachtet werden. Um die Intensität zu messen, sollte der Mittelwert des Poynting-Vektors $\langle \vec{S} \rangle$ bestimmt werden. Dieser ist wie folgt definiert:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \operatorname{Re} \left(\vec{E}(\vec{x}) \times \vec{B}^*(x) \right) \tag{2.1}$$

Nach der punktförmigen Quelle nimmt das elektrische und magnetische Feld nach den Gesetzen der Elektrodynamik in der Fernzone ($d \gg \lambda$ und $r \gg \lambda$) jeweils mit $\frac{1}{r}$ ab (r bezeichnet den Abstand der Quelle zum Beobachter, d die Ausdehnung der Quelle). In diesem Fall würde der Poynting-Vektor und damit die Intensität also mit $\frac{1}{r^2}$ abnehmen.

Nach der Linse, wenn die Mikrowellen also zu ebenen Wellen gebrochen werden, kann man die Feldstärken wie folgt beschreiben:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

Mit den Amplituden \vec{E}_0 und \vec{B}_0 . Zudem bewegt sich die Welle in eine ausgezeichnete Richtung, sodass statt r nun x im Exponenten steht.

Der Poynting-Vektor bleibt konstant. Es folgt:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} E_0 \cdot B_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 \quad (2.2)$$

Dabei wurde die Beziehung $B = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cdot E$ benutzt (für Vakuum / Luft).

3 Fresnel-Beugung am Einzelspalt

Hier soll nun das Beugungsbild der Mikrowellen nach einem Einzelspalt ermittelt werden. Um die Intensität der Mikrowelle auf den Spalt zu erhöhen, sollte die Linse hinter dem Sender möglichst so eingestellt werden, dass der Sender im Brennpunkt der Linse ist, sodass die Mikrowellen parallel gebrochen werden.

Am Einzelspalt gehen dann punktförmige Kugelwellen aus. Betrachtet man das Beugungsbild kurz nach dem Spalt (Nahfeld), so erhält man die typischen Beugungsmuster der Fresnel-Beugung.

Entfernt man sich jedoch immer weiter vom Spalt (im Fernfeld), so kann man die Fraunhofer-Näherung anwenden, bei der die Kugelwellen durch ebene Wellen angenähert werden.

Da im vorliegenden Versuch die Wellenlänge der Mikrowellen, die in der Versuchshilfe mit $\lambda = 3 \text{ cm}$ angegeben wurden, im Vergleich zur Apparatur sehr groß sind, ist es zu erwarten, dass in der Nähe des Spaltes das Beugungsmuster wie Abb. 2d aussieht. Das Schaubild vollführt also „unruhige Zitterbewegungen“. Zudem werden die Minima zwar schwächer als die Stellen hoher Intensität ausfallen, jedoch nie 0 ergeben. Je weiter man sich jedoch vom Spalt entfernt, desto geringer werden die Effekte der Fresnelbeugung und desto eindeutiger wird das Beugungsmaximum, sodass das Beugungsbild für $r \rightarrow \infty$ gegen Abb.2a, also das einer reinen Fraunhoferbeugung, ähnlicher wird. Trotzdem werden aufgrund der großen Wellenlänge die Nahfeldeffekte noch merklich ins Gewicht fallen.

4 Beugung am Einzelspalt, Doppelspalt und am Gitter

Wie im letzten Abschnitt soll wieder das Beugungsmuster bestimmt werden. Diesmal jedoch nicht nur vom Einzelspalt, sondern auch vom Doppelspalt und Gitter. Anschließend werden diese Ergebnisse mit den theoretisch vorhergesagten Kurven aus der Fraunhoferbeugung verglichen.

Für die Fraunhoferbeugung gilt:

$$\frac{I}{I_0}(k_z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} T(z) \cdot e^{-ik_z z} \right|^2 \quad (4.1)$$

mit $T(z)$ also Transmissionsfunktion. Zuerst beschreibe man die Orte der Spalte $f_s(z)$, die zuerst als sehr klein angenommen werden, sodass sie durch eine Deltafunktion beschrieben werden können. dann gilt für $f_p(z)$:

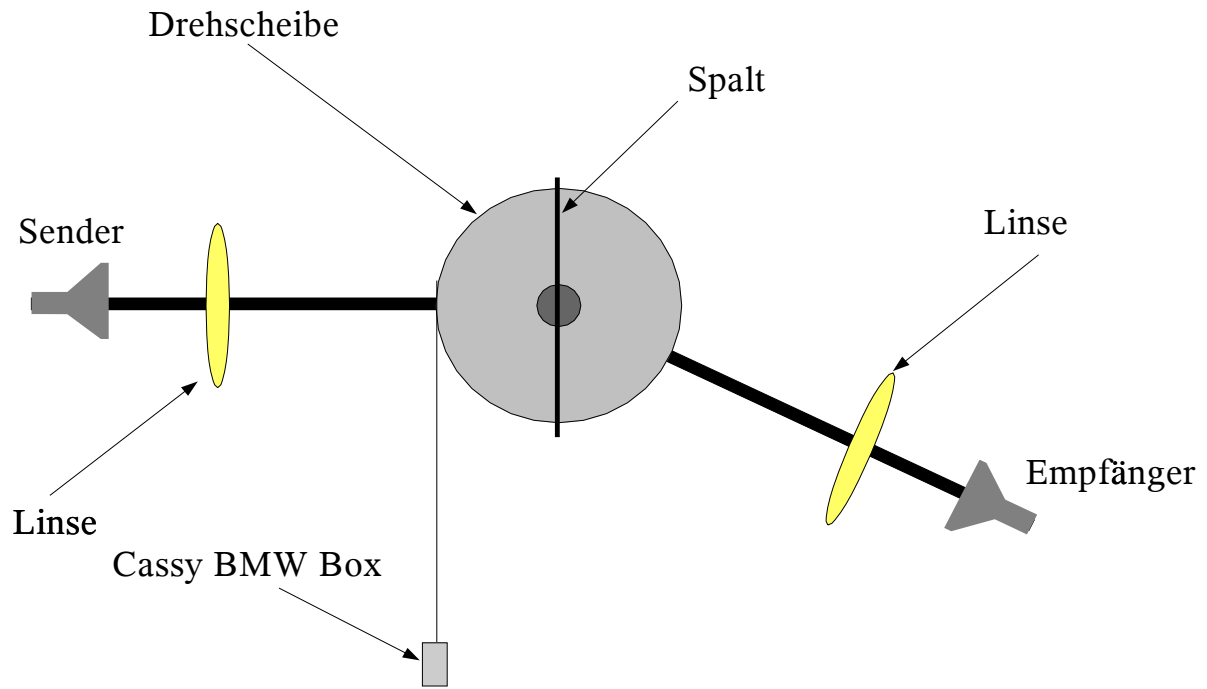


Abbildung 1: Versuchsaufbau zur Messung des Spaltspektrums.

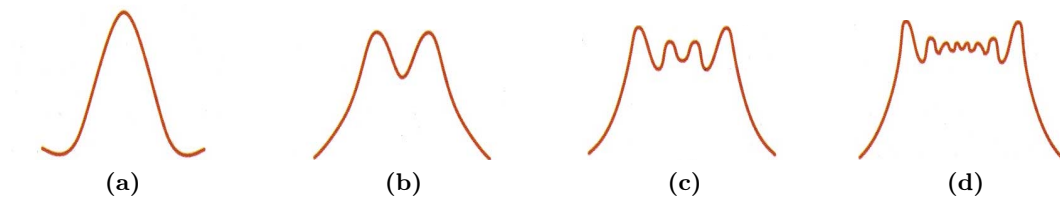


Abbildung 2: Übergang von Fraunhofer-Beugung zur Fresnel-Beugung

$$f_p(z) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \delta(z - a_n) \quad (4.2)$$

a_n sei der Abstand des Spaltes vom Mittelpunkt des jeweiligen Bauelements, N die Gesamtzahl der Spalte (Hier wird von einer geraden Spaltanzahl ausgegangen, ist die Gesamtzahl ungerade, so befindet sich bei symmetrischem Aufbau ein Spalt mehr im Mittelpunkt des Bauelements, in diesem Fall muss man statt N $N - 1$ in die Summenobergrenze und $N + 1$ in die Summenuntergrenze einsetzen, der Einfachheit wegen werden die Grenzen erst so geschrieben, als sein die Spaltzahl gerade).

Um die endliche Breite der Spalte mit einzubeziehen, kann man $f_p(z)$ mit einer Funktion, die die jeweilige Breite der Spalte zum Ausdruck bringt, falten. Diese Spaltfunktion $f_s(z)$ ist eine Theta-Funktion, deren Breite s die Breite des Spaltes entspricht (Die Breite jedes Spaltes ist immer gleich):

$$f_s(z) = \theta\left(z + \frac{s}{2}\right) - \theta\left(z - \frac{s}{2}\right) \quad (4.3)$$

Die Faltung beider Funktionen ergibt die Transmissionsfunktion $T(z)$, also:

$$T(z) = f_p(z) * f_s(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_p(\xi) \cdot f_s(z - \xi) d\xi \quad (4.4)$$

Für die Intensitätsverteilung $\frac{I}{I_0}$ folgt:

$$\frac{I}{I_0}(k_z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(\xi) \cdot f_s(z - \xi) \cdot e^{-ik_z z} d\xi dz \right|^2 = \left| \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}\{f_p * f_s\}(k_z) \right|^2$$

Nach dem Faltungstheorem gilt $\mathcal{F}(f * g)(s) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}\{f\}(s) \cdot \mathcal{F}\{g\}(s)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0}(k_z) &= \left| 2\pi \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(z) e^{-ik_z z} dz}_{\mathcal{F}\{f_p\}(k_z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_s(z) e^{-ik_z z} dz}_{\mathcal{F}\{f_s\}(k_z)} \right|^2 \\ \frac{I}{I_0}(k_z) &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \delta(z - a_n) \cdot e^{-ik_z z} \right) dz \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\theta\left(z + \frac{s}{2}\right) - \theta\left(z - \frac{s}{2}\right) \right) e^{-ik_z z} dz \right|^2 \\ \frac{I}{I_0}(k_z) &= \left| \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{ik_z a_n} \cdot \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} e^{-ik_z z} dz \right|^2 = \left| \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{ik_z a_n} \cdot \frac{2}{k_z} \sin\left(k_z \frac{s}{2}\right) \right|^2 \\ \frac{I}{I_0}(k_z) &= \left| \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{ik_z a_n} \cdot s \cdot \text{sinc}\left(k_z \frac{s}{2}\right) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nun wird ein einheitlicher Abstand a der Spalte angenommen. Dazu werden 2 Fälle unterschieden:

- Ist in der Mitte des Gitters kein Spalt, so gilt $a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot a$. Es folgt:

$$\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} e^{ik_z a_n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(e^{ik_z \left(n + \frac{1}{2}\right) a} + e^{-ik_z \left(n + \frac{1}{2}\right) a} \right) = 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(k_z \left(n + \frac{1}{2}\right) a\right)$$

Die -1 bei $\frac{N}{2} - 1$ kommt daher zustande, da das erste Spaltpaar mit $n=0$ einbezogen wird, das nächste mit $n = 1$ und das übernächste mit $n = 2$ usw. . Bei N Spaltpaaren muss n also bis $N - 1$ laufen.

$$\frac{I}{I_0}(k_z) = \left| 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(k_z \left(n + \frac{1}{2}\right) a\right) \cdot s \cdot \text{sinc}\left(k_z \frac{s}{2}\right) \right|^2 \quad (4.6)$$

- Existiert in der Mitte des Gitters ein Spalt, so gilt $a_n = n \cdot a$. Es folgt:

$$\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{ik_z a n} = 1 + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(e^{ik_z n a} + e^{-ik_z n a} \right) = 1 + 2 \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \cos(k_z n a)$$

Hier rührt die -1 bei $\frac{N-1}{2}$ bzw. die $+1$ bei $\frac{N+1}{2}$ daher, da die Gesamtzahl der Spalte hier nun ungerade ist. Der mittlere Spalt wird gesondert berechnet, da er keinen Partner hat. Deswegen wird auch ab $n = 1$ summiert. Der Mittelspalt liegt bei $n = 0$ und trägt mit dem Summand 1 bei. (siehe Beginn dieses Abschnitts)

$$\frac{I}{I_0}(k_z) = \left| \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos(k_z n a) \right) \cdot s \cdot \text{sinc} \left(k_z \frac{s}{2} \right) \right|^2 \quad (4.7)$$

Für den Beugungswinkel α gilt:

$$\sin \alpha = \frac{k_z}{|k|} = k_z \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \Leftrightarrow k_z = \frac{\sin \alpha \cdot 2\pi}{\lambda} \quad (4.8)$$

Es folgt also für Gitter mit gerader Spaltzahl:

$$\frac{I}{I_0}(\alpha) = \left| 2 \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \cos \left(\frac{\sin \alpha \cdot 2\pi}{\lambda} \left(n + \frac{1}{2} \right) a \right) \right|^2 \cdot s^2 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\sin \alpha \cdot s\pi}{\lambda} \right) \quad (4.9)$$

Und für Gitter mit ungerader Spaltzahl gilt:

$$\frac{I}{I_0}(\alpha) = \left| 1 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos \left(\frac{\sin \alpha \cdot 2\pi}{\lambda} n a \right) \right|^2 \cdot s^2 \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\sin \alpha \cdot s\pi}{\lambda} \right) \quad (4.10)$$

Der Einzelspaltterm (sinc-Terme) bildet also die Einhüllende der viel hektischer verlaufenden cos-Terme die Zwischenminima und -maxima bilden. Je mehr Spalte vorhanden sind – also je weiter die Summe läuft – desto mehr Zwischenminima und -maxima existieren. Allerdings werden diese immer schwächer und die Hauptmaxima werden immer ausgeprägter. Dieses Phänomen lässt sich auch auf Abb. 3 deutlich erkennen.

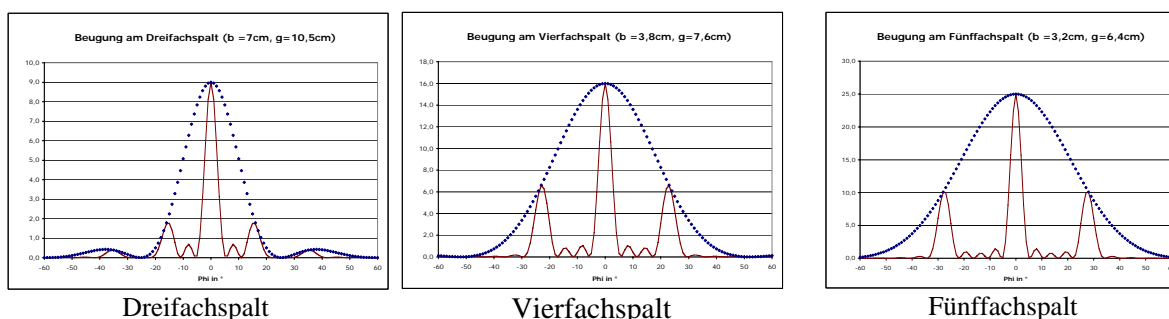


Abbildung 3: Interferenzmuster von Mehrfachspalten.

5 Interferometer

Mithilfe zweier Plexiglasscheiben soll ein einfaches Interferometer aufgebaut werden. Dazu stellen wir zwei Plexiglasscheiben im Abstand d senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Mikrowellen in den Strahlengang. Diese Plexiglasscheiben wirken nun wie halbdurchlässige Spiegel. Etwa die Hälfte der Mikrowellen wird transmittiert, die andere Hälfte wird reflektiert.

Ein Teil der Mikrowellen läuft also durch beide Scheiben direkt durch. Ein anderer Teil jedoch kann zum Beispiel die erste Scheibe durchdringen, an der zweiten Scheibe aber gespiegelt werden. Er gelangt wieder zur ersten Scheibe, kann dort wieder zur zweiten Scheibe gespiegelt werden und von letzterer transmittiert werden. Schließlich interferiert diese Welle mit Wellen, die direkt durch beide Plexiglasscheiben durchgekommen sind. Diese Welle legt aber einen um $2d$ längeren Weg zurück als diejenigen, die unmittelbar durch beide Scheiben transmittiert wurden. Dabei hat sich seine Phase φ um $2kd = \frac{4\pi d}{\lambda}$ im Vergleich zur ersten Welle verschoben. Alle anderen Teilwellen, die mehr als einmal hin und zurück reflektiert wurden, besitzen dieselben Minima- und Maximabedingungen, weswegen hier nur die für die Teilwelle mit einmaliger Doppelreflexion aufgeführt wird:

Betrachtet man nun die Intensität der interferierten Mikrowellen, so kann man Intensitätsminima und -maxima wahrnehmen. Für diese gilt:

a) **Minima:** Phasenverschiebung $\varphi_{\min} = (2n - 1) \cdot \pi \quad n \in \mathbb{N}$

$$(2n - 1) \pi = \frac{4\pi d}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4d}{2n - 1} \quad (5.1)$$

b) **Maxima:** Phasenverschiebung $\varphi_{\max} = 2n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{N}$

$$2n\pi = \frac{4\pi d}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2d}{n} \quad (5.2)$$

Mit CASSY und einem Bewegungswandler wird nun die Intensität und der Plattenabstand gemessen. Aus diesen Daten lässt sich auf die Wellenlänge λ schließen.

6 Polarisation

In diesem Aufgabenteil wird die Polarisation der erzeugten Mikrowellen untersucht.

a) Da die Wellen mit einem Dipol erzeugt wurden, sind sie linear polarisiert. Ihr elektrisches Feld hat also die Form $\vec{E}(\vec{r}) = \text{Re} \left(\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right)$.

Der Empfänger ist auch ein Dipol mit Ausrichtung \hat{e}_E , der empfangbare Anteil \vec{E}_E hat als Betrag das Skalarprodukt aus \hat{e}_E mit \vec{E} , die den Winkel θ einschließen, und als Richtung \hat{e}_E :

$$\vec{E}_E = \vec{E} \cdot \hat{e}_E = \text{Re} \left(|\vec{E}_0| e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right) \cdot \cos \theta \hat{e}_E$$

Für die Intensität folgt nun:

$$I = (\vec{E}_E)^2 = |\vec{E}_0|^2 \cos^2 \theta \quad (6.1)$$

- b) Mit einem $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen wird die zuerst linear polarisierte Welle zirkular polarisiert. Dazu wird die ausgezeichnete Achse des Plättchens um 45° gegen die Polarisationsrichtung der Welle aufgestellt. Das Plättchen führt eine Doppelbrechung mit der Welle aus. Die Teilwelle in extraordinärer Richtung breitet sich schneller aus als die Teilwelle in ordinärer Richtung, bis die Phasen nach Austritt aus dem Plättchen um genau 90° verschoben sind.

Da als doppelbrechendes Material ein Metallgitter verwendet wird, wird die Teilwelle, welche parallel zu den Metallstreifen ausgerichtet ist, viel stärker gedämpft als die, welche senkrecht dazu steht. Infolgedessen sind die Amplitude beider Teilwellen nach Austritt nicht mehr gleich, sodass vielmehr eine elliptische statt eine zirkular polarisierte Welle zu beobachten ist.

Das $\frac{\lambda}{4}$ im Namen des Plättchen hat den Grund, dass die für zirkulare Polarsation einer vormals linear polarisierten Welle das Plättchen die Dicke $d = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{1}{n_\perp - n_\parallel}$ haben muss.

Mit dem Empfänger sollte theoretisch bei zirkularer Polarisation eine richtungsunabhängige Intensität gemessen werden. Bei einer elliptischen Polarisation jedoch, wie sie in diesem Versuch vermutlich vorliegen wird, werden höhere Intensitäten in Richtungen der großen Halbachsen und niedrigere Intensitäten in der Richtung der kleinen Halbachsen zu messen sein.

7 Absorptionsvermögen

Nun wird qualitativ das Absorptionsvermögen von Glas, Plexiglas sowie dem Paraffin der Linsen untersucht. Dazu misst man zuerst die Intensität der Mikrowelle ohne Hinternis, und misst anschließend nochmal die Intensität, wenn man in den Wellengang das entsprechende Medium eingesetzt hat. Aus der Intensitätsdifferenz lässt sich auf das Absorptionsvermögen der Stoffe schließen.

8 Optischer Tunneleffekt

In diesem Versuch wird das optische Tunneln untersucht. Schickt man Mikrowellen senkrecht zu einer Kathetenfläche in ein rechtwinkliges Prisma, wird dieses Licht an der Hypothenusenfläche total reflektiert.

Nun nimmt man ein gleichartiges Prisma und stellt beide Hypothenusenflächen ganz nah parallel aneinander, sodass aber noch ein kleiner Luftspalt dazwischen ist. Obwohl der Winkel des einfallenden Strahls zur ersten Hypothenusenfläche immer noch gleich ist, kann nun ein Teil des Lichts aus dem ersten Prisma austreten und in das zweite Prisma gelangen. Diesen Effekt nimmt man optisches Tunneln.

Es soll gemessen werden, wie sich die Intensität I der Mikrowellen, die in das zweite Prisma tunneln können, mit dem Abstand beider Hypothenusenflächen x verhält. Da der Tunneleffekt exponentiell mit der Entfernung abnimmt, wird $\ln I$ über x aufgetragen, sodass eine Gerade zustande kommt. Aus deren Steigung lässt sich der Exponentialvorfaktor a bestimmen, woraus man eine Funktion zwischen I und x aufstellen kann. Aus dieser Beziehung kann man dann die Reichweite R bestimmen, bei der sich I um den Faktor e abgeschwächt hat, also wenn $a = x^{-1}$ ist. Diese Reichweite soll nun mit der Wellenlänge der Mikrowellen verglichen werden.