

Versuchsprotokoll:

Elektronenspinresonanz

Christian Buntin, Jingfan Ye

Gruppe 221

Karlsruhe, 8. November 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	2
1.1	Magnetisches Moment des Elektrons	2
1.2	Elektronenspinresonanz	3
1.3	Besetzung	3
1.4	Hyperfeinstruktur	4
1.5	Auswahlregeln	5
1.6	Erwartete Absorptionslinien	5
2	Versuche	6
2.1	Vorversuch	6
2.2	Elektronenspinresonanz	6
2.2.1	Abhängigkeiten der Resonanz	6
2.2.2	Bestimmung des g -Faktors	7
2.2.3	Messung der Linienbreite	9
3	Auswertung	9
3.1	g -Faktor	9
3.1.1	Erste Messreihe	9
3.1.2	Zweite Messreihe	10
3.1.3	Dritte Messreihe	10
3.1.4	Fehlerbetrachtung	11
3.1.5	Ergebnis	12
3.2	Resonanzbreite	12

Einleitung

Mithilfe der Elektronenspinresonanz wird die Absorption von Mikrowellenstrahlen durch eine Probe bei einem von außen angelegtem Magnetfeld gemessen. Aus dem Absorptionsspektrum lassen sich dann Übergänge zwischen Energieniveaus bestimmen, woraus Rückschlüsse auf die Struktur der Probe gezogen werden können.

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Magnetisches Moment des Elektrons

Bei einem klassischen Atom erzeugt ein Elektron, das den Kern umläuft, einen Kreisstrom I , welcher das magnetische Moment $\vec{\mu}$ des Atoms hervorruft. Es gilt:

$$I = \frac{q}{T} = -\frac{e|\vec{\omega}|}{2\pi} \quad (1.1)$$

e bezeichnet hier die Elementarladung und ω die Kreisfrequenz, mit der das Elektron kreist. Es folgt:

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} = -\frac{1}{2}e\vec{\omega}r^2, \quad (1.2)$$

wobei r der Abstand des Elektrons zum Atomkern ist. Drückt man diese Größe mit dem Bahndrehimpuls \vec{l} des Elektrons aus, erhält man mit $\vec{l} = mr^2\vec{\omega}$ (m ist die Elektronenmasse):

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{l} \quad (1.3)$$

Da der Drehimpuls in der Quantenphysik immer ein Vielfaches von \hbar ist, ersetzt man die Vorfaktoren zu einer neuen Einheit, dem **Bohrschen Magneton** μ_B und setzt den Drehimpuls auf \hbar .

$$\vec{\mu} = -\frac{e\hbar}{2m} := -\mu_B \quad (1.4)$$

Man schreibt das magnetische Moment $\vec{\mu}_l$, welches durch den Bahndrehimpuls hervorgerufen wird, also auch wie folgt:

$$\vec{\mu}_l = -g_l\mu_B\frac{\vec{l}}{\hbar} \quad (1.5)$$

g ist der **Landé-Faktor**. Er gibt das Verhältnis zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls an. Der des Bahndrehimpuls – g_l – ist immer 1, wie wir gerade eben gesehen haben.

Teilchen wie Elektronen besitzen jedoch auch eine Quanteneigenschaft, die man den **Spin** nennt. Man kann sich diesen wie einen Eigendrehimpuls vorstellen, genau genommen hat dieser aber kein klassisches Äquivalent. Der Eigenwert des Spinoperators S ist $\sqrt{s(s+1)}\hbar$ mit $s = \frac{1}{2}$. Er hat also eine äquivalente Form wie der des Bahndrehimpulsoperators L . Der Spin erzeugt ein magnetisches Moment μ_s im Elektron von:

$$\vec{\mu}_s = -g_s\frac{e}{2m}\vec{s} \quad (1.6)$$

Der Landé-Faktor des Spins ergibt empirisch 2,0023. Dirac zeigte, dass der Spin eine Folge der relativistischen Quantentheorie ist und leitete einen Landé-Faktor von 2 her. Die restliche Abweichung

vom empirischen Wert erklärt sich durch die Wechselwirkung des Elektrons mit dem eigenen Strahlungsfeld.

Im Allgemeinen setzt sich der Drehimpuls \vec{J} vektoriell zusammen aus dem Bahndrehimpuls \vec{L} und dem Spin \vec{S} . Das allgemeine magnetische Moment $\vec{\mu}_j$ hat dann folgenden Landé-Faktor:

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (1.7)$$

Dies kann man mit Hilfe einfacher geometrischer Überlegungen herleiten.

1.2 Elektronenspinresonanz

Ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ erfährt im Magnetfeld \vec{B} ein Drehmoment $\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Die potenzielle Energie beträgt dabei $V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, welche zu einer Gesamtenergieverschiebung führt.

Der Vektor μ_j präzediert dann um das Magnetfeld. Da die Präzession so schnell ist, dass sich alle Komponenten bis auf die z-Komponente ausgleichen, ist nur letztere interessant. Es gilt:

$$V_m = -\vec{\mu}_z \cdot B_0 = mg\mu_B B_0 \quad \text{mit} \quad m = -j, \dots, j$$

j bezeichnet die allgemeine Drehimpulsquantenzahl. Bei der Elektronenspinresonanz betrachtet man nur das magnetische Moment der Elektronen im Atom, welcher durch den Spin hervorgerufen wird. Damit gilt $j = s = \pm \frac{1}{2}$. Das Magnetfeld spaltet die Elektronen also in zwei Zustände auf, welche die Energiedifferenz $\Delta E = g_s \mu_B B$ besitzen. Der Wechsel zwischen den beiden Zuständen ist möglich durch Absorption und Emission von Photonen, welche genau die Energie ΔE besitzen. Dies ist gerade die Resonanzbedingung, die in diesem Versuch untersucht werden soll:

$$\Delta E = \hbar\omega = hv = g_s \mu_B B_0 \quad (1.8)$$

1.3 Besetzung

Die Stärke der Absorption bzw. der Emission der Photonen hängt von den Besetzungszahlen der Zustände ab. Je stärker zum Beispiel das energieärmere Niveau besetzt ist, desto stärker ist die Absorption.

Setzt man voraus, dass die Elektronen verschiedener Atome untereinander nicht wechselwirken, gehorcht im thermischen Gleichgewicht die Anzahl der Elektronen n_i mit der Energie E_i der Maxwell-Boltzmann-Verteilung, welche lautet:

$$n_i = \text{const} \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}} \quad (1.9)$$

Es existieren bekanntlich nur zwei mögliche Zustände für Spins - Spin Up und Spin Down - mit den Spinquantenzahlen $s = +\frac{1}{2}$ bzw. $s = -\frac{1}{2}$. Der Verhältnis der Anzahl der Teilchen in den zwei Zuständen beträgt also:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} \quad (1.10)$$

Der Zustand 1 bezeichne nun den energieärmeren, der Zustand 2 den energiereicheren Zustand. Damit folgt $\Delta E = E_2 - E_1$ und, um eine Besetzungsinversion zu vermeiden, $\Delta n = n_1 - n_2$ (mit $n = n_1 + n_2$).

Je größer Δn , also je mehr Elektronen zum Zustand 1 und je weniger im Zustand 2 sind, desto höher die die Absorption. Formt man Gleichung (1.10) auf der vorherigen Seite um, so erhält man:

$$\Delta n = n \cdot \frac{1 - e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}} \quad (1.11)$$

Entwickelt man den Exponentialterm im Zähler bis zur 1. und den im Nenner bis zur 0. Ordnung nach ΔE um $\Delta E_0 = 0$, so erhält man:

$$\Delta n \approx n \cdot \frac{\Delta E}{2kT} = n \cdot \frac{g_s \mu_B B}{2kT} \quad (1.12)$$

Aus dieser Gleichung kann man folgende Eigenschaften der ESR ablesen:

- Die Absorption ist proportional zur Gesamtzahl der Teilchen. Dies gilt auch für die nicht genäherte Funktion. Man kann mit der Stärke des ESR-Signals auf die Anzahl der Teilchen schließen.
- Die Absorption ist proportional zur Stärke des Magnetfeldes und umgekehrt proportional zur Temperatur. Um hohe Absorptionen zu erreichen, sollte man ein möglichst starkes Magnetfeld und eine möglichst niedrige Betriebstemperatur wählen.

1.4 Hyperfeinstruktur

Zusätzlich zur Energieaufspaltung durch die Wechselwirkung der Elektronenspins mit dem äußeren Magnetfeld gibt es noch schwache Einflüsse auf das Absorptionsspektrum aufgrund des Kernspins (anisotrop) sowie der Relativitätstheorie (isotrop). Diese Effekte fasst man unter dem Begriff **Hyperfeinstruktur** zusammen. Sie führt dazu, dass die Einzellinie, wie man sie aus den bisherigen Überlegungen erwarten würde, zu mehreren Linien aufgespalten wird.

Die anisotrope Hyperfeinstruktur lässt sich auf die gegenseitige Wechselwirkung der magnetischen Momente, die durch den Kernspin und dem Elektronenspin hervorgerufen werden, zurückführen. Die Wechselwirkungsenergie beträgt, wenn die ausgezeichnete z-Achse weiterhin der Richtung des äußeren Magnetfeldes entspricht:

$$\Delta E_{S,I}^a = -g \cdot \mu_B m_S \cdot \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} \right) g_I \mu_K m_I \quad (1.13)$$

m_S ist die magnetische Spinquantenzahl des Elektrons und g ihr Landé-Faktor. $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p}$ bezeichnet das Kernmagneton mit m_p als Protonenmasse und m_I stellt die magnetische Kernquantenzahl dar.

Der Erwartungswert der Energie beträgt¹:

$$\langle \psi | \Delta E_{S,I}^a | \psi \rangle = -g g_I \mu_K \mu_B m_S m_I \cdot \int \psi^* \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} \psi \, d\tau \quad (1.14)$$

ψ ist die orthonormierte Wellenfunktion des Elektrons. Wie man hier offensichtlich sehen kann, ist die Energie explizit winkelabhängig.

Die isotrope Hyperfeinstruktur ist auf relativistische Korrekturen zurückzuführen. Der Erwartungswert ihrer Energie beträgt¹:

$$\langle \psi | \Delta E_{S,I}^i | \psi \rangle = \frac{8\pi}{3} g \mu_B g_I \mu_K m_S m_I \int \psi^* \delta(r) \psi \, d\tau \quad (1.15)$$

¹nach Klaus Scheffler. *Elektronenspinresonanz*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1970.

$\delta(r)$ ist die Delta-Distribution. In beiden Integralen ist über den gesamten Hilbertraum zu integrieren. Bei mehreren wechselwirkenden Kernen muss man logischerweise über die Wechselwirkungsenergie aller beteiligten Kerne summieren.

1.5 Auswahlregeln

Bei der ESR sind nur bestimmte Auswahlregeln für Zustandsübergänge erlaubt. Diese sind:

$$\Delta m_S = \pm 1 \quad \Delta m_I = 0 \quad (1.16)$$

1.6 Erwartete Absorptionslinien

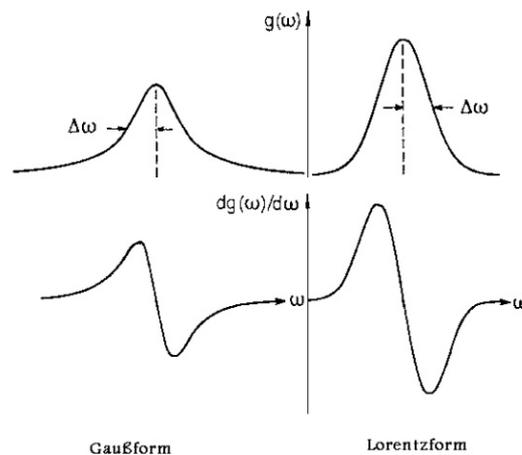


Abbildung 1: Linienformen und deren Ableitung (unten), Quelle: Vorbereitungsmappe

Zusätzlich zu den vorangegangenen Überlegungen gibt es Effekte, die die Resonanzkurven verbreitern. Die Linienform schwankt dabei zwischen den beiden Extrema, der Gaußkurve und der Lorentzkurve (Abbildung 1).

Unter Anderem liegen folgende Einflüsse auf die Linienform vor:

- Die Verbreiterung lässt sich durch interne Dipol-Zusatzmagnetfelder erklären. Diese Felder ändern sich, wodurch sich von der Geschwindigkeit dieser Fluktuationen eine Gauß- oder Lorentzform ergibt.
- Durch die Inhomogenität des Magnetfelds kommt es zu einer Verbreiterung der Linie, da dadurch die Resonanzbedingung (Gleichung (1.8) auf Seite 3) bei leicht unterschiedlichen Frequenzen auftritt.
- Bei zu starker Intensität der Mikrowelleneinstrahlung reicht die Spin-Gitter-Relaxation nicht mehr dazu aus, die Boltzmannverteilung wiederherzustellen.

2 Versuche

Probe

Als Probe wird DPPH (Diphenyl-Picryl-Hydrazyl) verwendet (Abbildung 2). Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass es ein ungepaartes Elektron besitzt. Dadurch kommen hier fast nur die Spin-Eigenschaften des Elektrons zur Geltung

2.1 Vorversuch

In diesem Vorversuch soll zunächst gezeigt werden, dass der Hochfrequenzschwingkreis, mit welchem wir die Resonanzbedingung am Elektron herstellen wollen, im Resonanzfall tatsächlich Energie abgibt. Der passive Schwingkreis stellt hierbei ein Modell für die Probe dar.

Wir haben die Frequenz des HF-Schwingkreises variiert, bis der Resonanzfall am passiven Schwingkreis, welcher vor dem HF-Schwingkreis positioniert wurde, auftritt. Dies war dadurch zu erkennen, dass der Strom im HF-Schwingkreis minimal wurde.

Da wir dies tatsächlich beobachteten, nimmt also die Amplitude im Resonanzfall ab und das Signal wird schwächer. Damit lässt sich nun anhand der Amplitude des HF-Schwingkreises der Resonanzfall erkennen.

2.2 Elektronenspinresonanz

Den HF-Schwingkreis im ESR-Adapter betrieben wir nun mit der DPPH-Probe am ESR-Betriebsgerät (Abbildung 3 auf der nächsten Seite). Dieses stellte alle benötigten Spannungen und Ströme für den HF-Schwingkreis samt integriertem Frequenzzähler sowie den Signalausgang für das Oszilloskop zur Verfügung. Die Helmholtzspule wurde mit Wechselstrom betrieben, wodurch sich auch die Stärke des Magnetfelds periodisch änderte. Zur Messung des Stromes durch die Spule wurde mit dem Oszilloskop der Spannungsabfall U_B an einem Widerstand $R_B = 1,07 \Omega$ dargestellt.

Am Oszilloskop haben wir die Amplitude des HF-Schwingkreises (im Bild grün) und den Strom durch die Helmholtzspule (\propto zur roten Kurve) über einer gemeinsamen Zeitbasis dargestellt (Abbildung 4 auf Seite 8). Das Oszilloskop haben wir so justiert, dass die Spannung U_B gerade eine Periode durchläuft. Da somit eine beliebige Spannung U mit $0 < U < U_{\max}$ ohne Vorzeichenberücksichtigung vier Mal durchlaufen wird, bekommen wir vier Resonanzpeaks zu sehen. Genau an diesen Stellen stehen der Betrag B_0 des Magnetfeldes der Helmholtzspule und die Frequenz ν des HF-Schwingkreises so im Verhältnis, dass der Resonanzfall auftritt (Gleichung (1.8) auf Seite 3):

$$h\nu = g\mu_B B_0 \quad (2.1)$$

Wie im Vorversuch gezeigt entzieht die Probe dem Schwingkreis Energie, weshalb eben dieser Resonanzfall durch einen starken Abfall der Amplitude gekennzeichnet ist, welchen wir auf dem Oszilloskop als Minimum betrachten können.

2.2.1 Abhängigkeiten der Resonanz

- Das die grünen Peaks in Abbildung 4 auf Seite 8 tatsächlich auf die Probe zurückzuführen sind, lässt sich durch Entfernen ebendieser verdeutlichen. Ohne Probe sind keine Peaks zu sehen (Abbildung 5 auf Seite 8), denn ohne Probe tritt keine Resonanz mehr auf, da keine ungepaarten Elektronen mehr vorhanden sind.

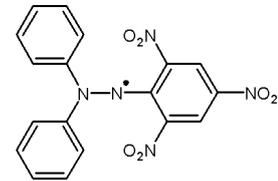


Abbildung 2:
Strukturformel von DPPH

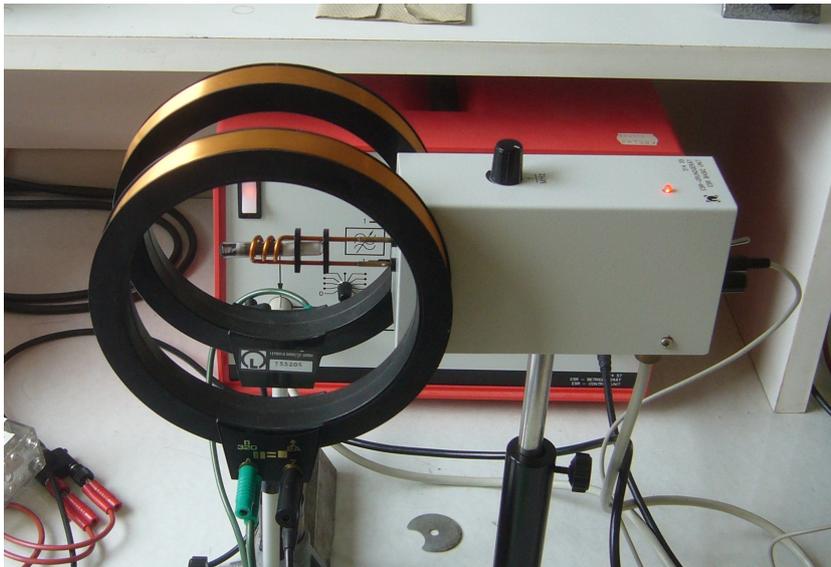


Abbildung 3: Versuchsaufbau zur Messung der Elektronenspinresonanz. Die DPPH-Probe befindet sich in der Spule des ESR-Gerätes in der Mitte der Helmholtzspule.

- Bei einer Erhöhung der Amplitude des HF-Oszillators werden die Peaks des Resonanzfalles größer und heben sich daher deutlicher vom Hintergrund ab.
- Bei Veränderung der Magnetfeldamplitude wandert der Resonanzpeak mit, wobei er an den Stellen mit dem selben Betrag des Magnetfelds wie vorher bleibt, da nur da die Resonanzbedingung erfüllt ist.
- Nach Gleichung (1.8) auf Seite 3 gilt im Resonanzfall:

$$h\nu = g\mu_B B, \quad (2.2)$$

wobei B das Mangetfeld der Helmholtzspule ist mit

$$B = I \cdot 3,96 \frac{\text{mT}}{\text{A}} = \frac{U_B}{1,07 \Omega} \cdot 3,96 \frac{\text{mT}}{\text{A}}. \quad (2.3)$$

Diese Proportionalität wird im nächsten Abschnitt mit der Bestimmung des g -Faktors überprüft.

2.2.2 Bestimmung des g -Faktors

Nach der Resonanzbedingung in Gleichung (1.8) auf Seite 3 gilt:

$$h\nu = g\mu_B B = g \left(\frac{e}{m_e} \frac{h}{4\pi} \right) \frac{U_B}{1,07 \Omega} \cdot 3,96 \frac{\text{mT}}{\text{A}} \quad (2.4)$$

Damit lässt sich der g -Faktor durch Auftragen der Resonanzfrequenz ν über $\frac{\mu_B B}{h}$ bestimmen, indem man die Steigung g ermittelt:

$$\nu = g \cdot \left(\frac{U_B}{4\pi} \cdot \frac{e}{m_e} \cdot \frac{3,96 \frac{\text{mT}}{\text{A}}}{1,07 \Omega} \right) \Leftrightarrow g = \frac{\nu}{U_B} \cdot 4\pi \cdot \frac{m_e}{e} \cdot \frac{1,07 \Omega}{3,96 \frac{\text{mT}}{\text{A}}} \quad (2.5)$$

Mit allen Messwerten erhalten wir damit einen Wert für g von $2,0429 \pm 0,0024$ (Abbildung 6 auf Seite 9). Dieser Wert entspricht schon gut dem erwarteten Wert von 2,0036. Da die Messung allerdings

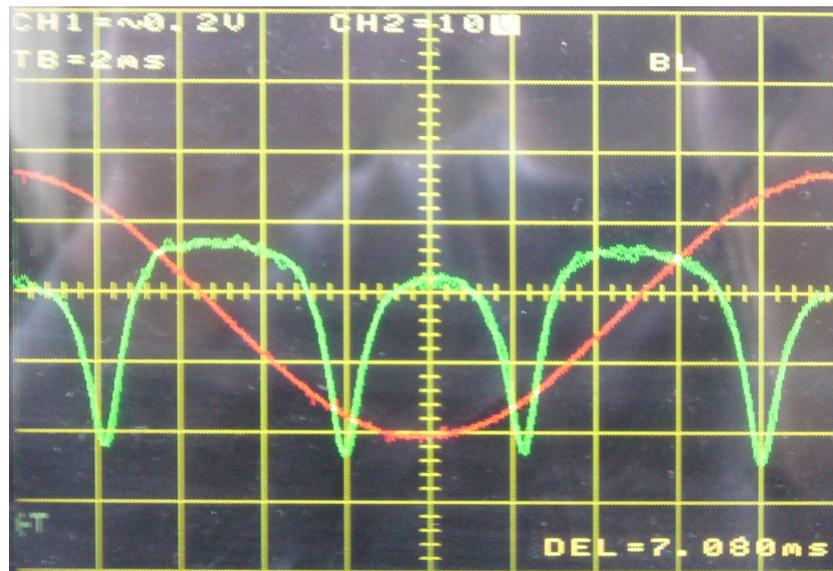


Abbildung 4: Elektronenspinresonanz am Oszilloskop. An den grünen Peaks ist die Resonanzbedingung erfüllt.

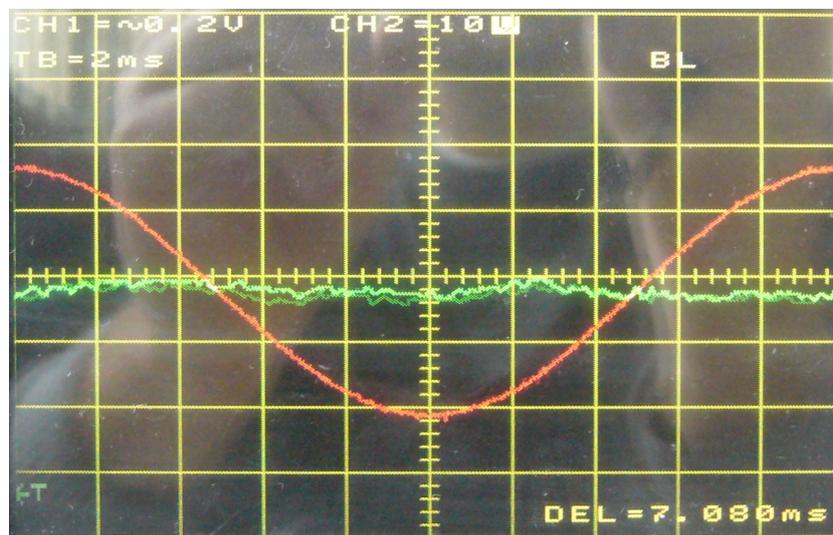


Abbildung 5: Der selbe Versuchsaufbau ohne DPPH-Probe: Es findet keine ESR statt.

aus drei Teilmessungen basiert, sollten diese auch getrennt betrachtet werden. Die auftretenden systematischen Fehler sind hier auch noch nicht berücksichtigt worden. Dies alles wird in Abschnitt 3 geschehen. Der oben angegebene Fehler ist die reine statistische Abweichung.

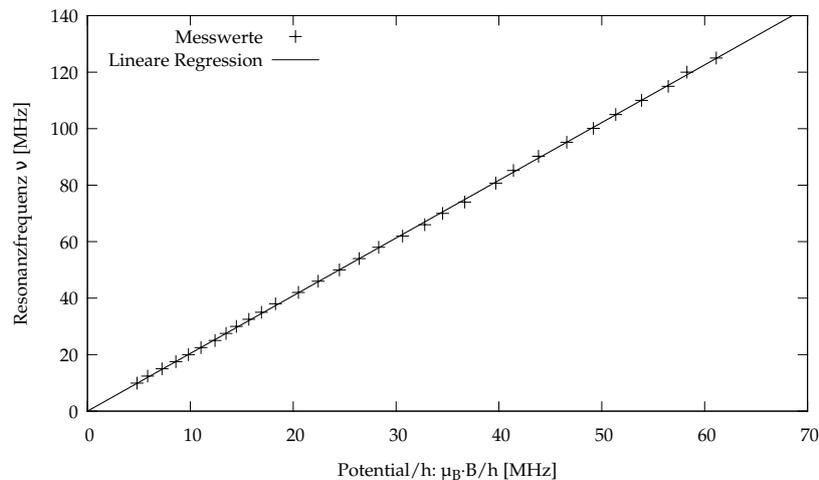


Abbildung 6: Bestimmung des g -Faktors mit allen drei Messreihen.

2.2.3 Messung der Linienbreite

Bei jeder Frequenz der vorherigen Messreihen haben wir auch die Linienbreiten aufgenommen. Dies ist die Breite des Resonanzpeaks bei dessen halber Höhe. Diese haben wir ermittelt, indem wir die Differenz der beiden Spannungen U_B links und rechts des Peaks bei eben dieser halben Höhe des Resonanzpeaks bestimmt haben.

3 Auswertung

3.1 g -Faktor

Da die Spulen des ESR-Gerätes feste Induktivitäten hatten und daher nur für bestimmte Frequenzen ausgelegt waren, haben wir mit drei verschiedenen Spulen unsere Messungen der Elektronenspinresonanz durchgeführt. Weil beim Abgreifen der Spannung am Widerstand in der Spulenzuleitung kleine zeitliche Verzögerungen auftraten, haben wir die Resonanzpeaks links und rechts von einem Nulldurchgang des Magnetfeldstroms aufgenommen und den Mittelwert gebildet. Damit sind auftretende Verschiebungen der Messwerte ausgeglichen.

3.1.1 Erste Messreihe

Mit der ersten Steckspule haben wir die Magnetfeldstärke der Helmholtzspule bei niedrigen Frequenzen (ca. 10 MHz bis 35 MHz) gemessen. Mittels linearer Regression (Abbildung 7 auf der nächsten Seite) erhalten wir hierfür einen Wert mit statistischem Fehler von

$$g = 2,059 \pm 0,022 .$$

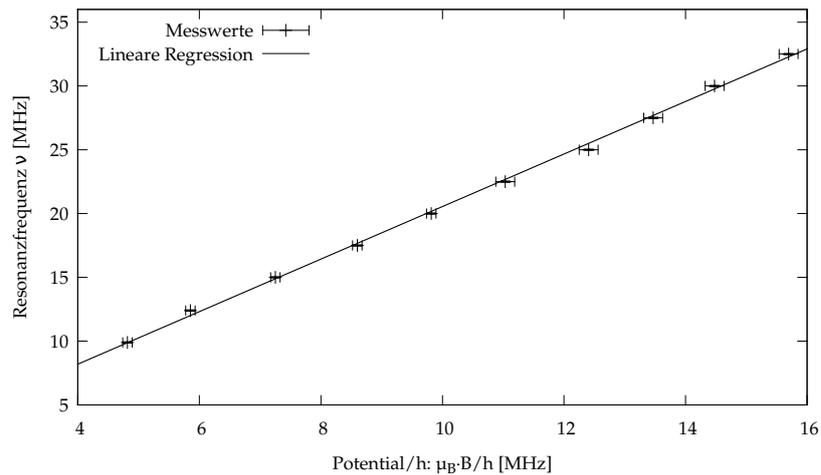


Abbildung 7: Bestimmung des g-Faktors mit der ersten Messreihe.

3.1.2 Zweite Messreihe

Mit der zweiten Steckspule haben wir die Magnetfeldstärke der Helmholtzspule bei mittleren Frequenzen (ca. 10 MHz bis 35 MHz) gemessen. Mittels linearer Regression (Abbildung 8) erhalten wir auch hierfür einen Wert mit statistischem Fehler von

$$g = 1,965 \pm 0,014 .$$

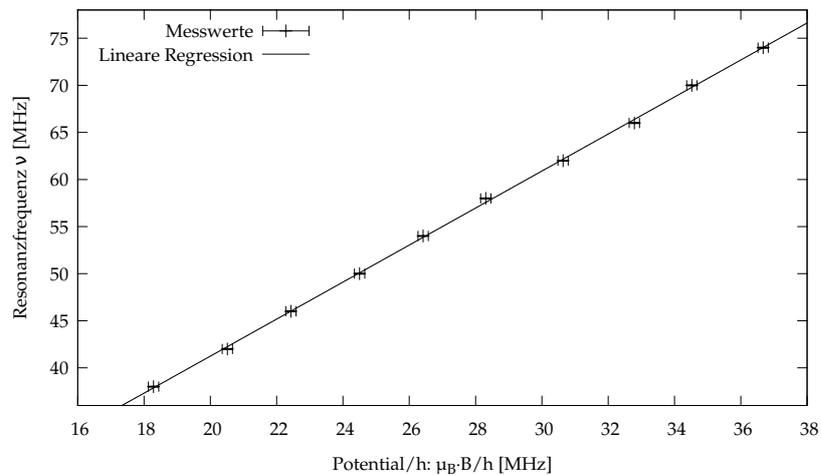


Abbildung 8: Bestimmung des g-Faktors mit der zweiten Messreihe.

3.1.3 Dritte Messreihe

Mit der dritten Steckspule haben wir die Magnetfeldstärke der Helmholtzspule bei hohen Frequenzen (ca. 80 MHz bis 125 MHz) gemessen. Wieder erhalten wir mittels linearer Regression (Abbildung 9 auf der nächsten Seite) hierfür einen Wert mit statistischem Fehler von

$$g = 2,048 \pm 0,023 .$$

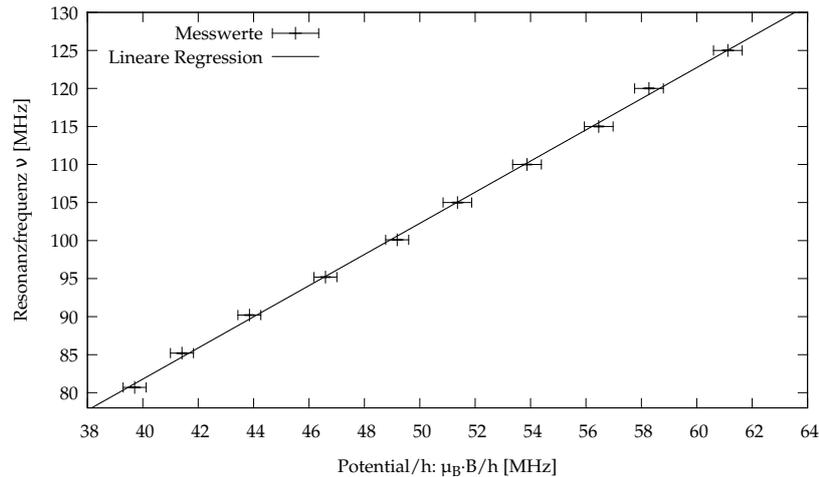


Abbildung 9: Bestimmung des g -Faktors mit der dritten Messreihe.

3.1.4 Fehlerbetrachtung

Den g -Faktor erhalten wir über Gleichung (2.5) auf Seite 7:

$$g = \frac{\nu}{U_B} \cdot 4\pi \cdot \frac{m_e}{e} \cdot \frac{1,07 \Omega}{a} \quad \text{mit } a = 3,96 \frac{\text{mT}}{\text{A}} \quad (3.1)$$

Für die Größen der Fehler der Messwerte nehmen wir an:

- Fehler der Frequenz: $\delta\nu = 0,05 \text{ MHz}$, da die Frequenz nur auf eine Nachkommastelle genau in MHz angegeben wurde.
- Fehler der Spannung am Widerstand in der Spulenzuleitung δU_B : Je nach Skalierung des Oszilloskops zwischen 3 mV und 20 mV (vgl. Messprotokoll). Da das Oszilloskop eine digitale Anzeige besaß, haben wir als Fehler die Veränderung der Spannung beim Bewegen des Cursors um einen Pixel nach rechts bzw. nach links genommen.
- Fehler des Widerstandes R_B in der Spulenzuleitung: $\delta R_B = 0,005 \Omega$, da dieser nur auf zwei Dezimalen genau angegeben war.
- Fehler von e und m_e : Diese liegen in der Größenordnung 10^{-8} und werden daher nicht berücksichtigt².
- Für den Faktor $a = 3,96$ des Magnetfeldes der Helmholtzpule nehmen wir einen Fehler von 1% an, also $\delta a = 0,04$. Damit sollen kleine Ungenauigkeiten des Magnetfeldes durch die Positionierung der Probe, durch den Einfluss des ESR-Geräts mit Probenkopf, durch Erwärmung der Spule und andere äußere Einflüsse berücksichtigt werden.

Da wir davon ausgehen, dass diese Messgrößen nicht korreliert sind, verwenden wir das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\delta g = \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \nu} (\delta \nu)^2 + \frac{\partial g}{\partial U_B} (\delta U_B)^2 + \frac{\partial g}{\partial R_B} (\delta R_B)^2 + \frac{\partial g}{\partial a} (\delta a)^2} \quad (3.2)$$

²Quelle: Physikalisch-Technische Bundesanstalt, http://www.ptb.de/de/naturkonstanten/_zahlenwerte.html

Damit erhalten wir:

$$\delta g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{\delta U_B}{U_B}\right)^2 + \left(\frac{\delta R_B}{R_B}\right)^2 + \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2} \quad (3.3)$$

Zur Auswertung haben wir für jedes Messwertepaar diesen Fehler δg berechnet und dann über der jeweiligen Messreihe gemittelt.

3.1.5 Ergebnis

Somit erhalten wir mit den einzelnen oder mit allen Messreihen folgende Werte für den g -Faktor mit statistischem und systematischem Fehler:

Messreihe	g -Faktor	Systematischer Fehler δg	Statistischer Fehler
Erste:	2,059	0,053	0,022
Zweite:	1,965	0,033	0,014
Dritte:	2,048	0,045	0,023
Mittelwert:	2,024	0,044	0,020

Also erhalten wir damit einen Wert von

$$g = 2,02 \pm 0,05 \pm 0,02$$

Dies stimmt unter Berücksichtigung der Fehlergrenzen mit dem Literaturwert von $g = 2,0036$ überein.

Der statistische Fehler liegt deutlich unter dem systematischem. Damit ist unsere Messgenauigkeit tatsächlich durch den Versuchsaufbau mitsamt den Instrumenten begrenzt. Möglicherweise haben wir allerdings auch unsere systematischen Fehler zu groß geschätzt, da unser Endergebnis sehr nahe am Literaturwert liegt.

Dieser Messwert ließe sich noch durch ein homogeneres und besser bekanntes Magnetfeld sowie durch ein Oszilloskop mit höherer Ablesegenauigkeit bzw. Auflösung präzisieren.

3.2 Resonanzbreite

Da wir die Resonanzbreiten für jeweils mehrere Frequenzen bestimmt haben, erhalten wir für die einzelnen Spulen folgende gemittelte Werte mit Fehlern:

Messreihe	Resonanzbreite [mV]	Systematischer Fehler [mV]	Statistischer Fehler [mV]
Erste:	84,8	9,3	5,2
Zweite:	84,7	12,0	13,1
Dritte:	104,3	36,0	15,7
Alle:	91,1	18,8	14,9

Der systematische Fehler ist nach der Fehlerfortpflanzung die Summe der Ablesefehler δU_B (wie oben) der einzelnen Spannungen, also $2 \cdot \delta U_B$. Dieser wurde über der jeweilige Messreihe gemittelt.

Somit ist die Resonanzbreite weitestgehend unabhängig von der Frequenz.